

Der MENGENBILDUNGS- PROZESS (1971)

S. 18ff

VORWORT

Ein Zweck der vorliegenden Arbeit ist es unter anderem, einer breiten Öffentlichkeit ein kleines Lehrbuch der Mengenlehre vorzulegen. Dieses ist mathematisch exakt, doch didaktisch so aufgebaut, daß die Formeln - und das möchte ich betonen - durchaus überlesbar sind. Insoferne scheint mir der Text besonders für Mittelschüler und deren Eltern geeignet.

Der zweite Teil, der etwas spezieller ist, bringt neue Erkenntnisse in der Mengenlehre, von denen ich gerne wünsche, daß der Leser die Überzeugung von der Bedeutsamkeit dieser Erkenntnisse für den menschlichen Fortschritt mit mir teilt. Den Interessenten für eine exakte Ausführung meiner "Extension der Mengenlehre" verweise ich auf Heft 3 der ÖSGK (Österr. Studien-Gesellschaft für Kybernetik).

Ich danke Herrn Prof. Dana Scott, Präsident der Association for symbolic logic, für Hinweise auf verschiedene Ungenauigkeiten bei der simplifizierten Darstellung der Syntho-Mengenlehre. Mein besonderer Dank gilt Herrn Dozent Robert Trappl für seine mäzenatische und moralische Unterstützung während der Ausarbeitung meiner Dissertation, die die Grundlage dieses Artikels ist. Ich freue mich über die produktive Zusammenarbeit mit meinen Freunden Franz Kaltenböck und Peter Weibel im Rahmen der "Inkontinenz I" und danke ihnen für die schwierige Ausarbeitung meines unvollständigen Diktat-Manuskriptes zu der hier präsentierten Fassung.



INHALTSVERZEICHNIS

Inhaltsverzeichnis:	0
<u>Teil A</u>	
I. Einführung	1
1.) Halbformale Umgangssprache	1
2.) Der Frege-Lukasiewicz'sche Quantorenkalkül " Q_F "	1
3.) Vollformalisierung und Formalisierung von oben	1
4.) Naive Mengenlehre	1
a) Ungeordnete Menge, ordbare Menge, Enumeration	1
b) Klassenbildung und Mengenbildung	1
c) Symbolisierung durch Buchstaben	1
II. Antinomien	1
1.) Antinomien von Burali-Forti, Cantor und Russell	1
2.) Verallgem. Darstellung der Antinomie der Allmenge	1
a) Abzählbarkeit der rationalen Zahlen: $N \sim Q$	1
b) Überabzählbarkeit der reellen Zahlen: $N < \mathbb{R}$	1
c) Der Satz von Cantor: " $P_m \supset m$ "	1
d) Allmengen-Paradoxie	1
3.) Die Russell'sche Antinomie	1
4.) Ultime-Klassen und außerordentliche Mengen	1
III. Axiomatische Mengenlehren (Standard-Systeme)	1
1.) Die Neumann-Bernays'sche Klassentheorie NB	1
2.) Die Zermelo-Fraenkel'sche Mengenlehre ZF	1
3.) Die Russell'sche Typentheorie TY	1
4.) Quine's "New Foundation" NF	1
a) Die Unverträglichkeit von NF mit dem Auswahl-Ax.	1
b) Die Omega-Inkonsistenz des Systems NF	1
c) Ein Paradox im System NF	1
<u>Teil B</u>	
IV. Die Anti-Mengenlehre ANT	1
1.) Axiome	1
2.) Proto-Anti-Zuordnung	1
3.) Formel-Isomorphismus, Variablen-Korrespondenz	1
V. Die Pro-Anti-Mengenlehre PROANT	1
VI. Die Syntho-Mengenlehre SY	1
1.) Axiome	1
2.) Der Fundierungs-Funktor " ε "	1
3.) Komplements-Existenz " $(\exists \neg \neg)$ "	1
VII. Die Elementar-Mengenlehre EL	1
1.) Nicht-Komplements-Äquivalenz " $x \nleftrightarrow x$ "	1
2.) Konstruktion der EL-Objekte	1
VIII. Die Octal-Mengenlehre OC	1
1.) Der Begriff "Octal"	1
2.) Beispiele	1
IX. Die Global-Mengenlehre GLO	1
1.) Transskription in die Kognitiv-Sprache	1
2.) Die Mirimanoff-Antinomie	1
3.) Systemen-System	1
4.) Mathematische Relevanz	1
X. Die ordbare Mengenlehre OM	1
ANHANG	1
1.) Zeichen-Tabelle	1
2.) Bibliographie	1

Teil A

I. EINLEITUNG

Wir wollen uns fragen, ob es für die exakten Wissenschaften, etwa die Naturwissenschaften, so etwas wie eine

1.) "HALBFORMALE UMGANGSSPRACHE"

gibt, d.h. eine Umgangssprache, wo zwischen den Zeilen nichts zusätzliches suggestiv und heuristisch ausgesagt wird, sondern wo die einzelnen Worte fest definierte Bedeutungen haben, welche wiederum aus wenigen Grundbegriffen zusammengesetzt werden. Die Worte benennen somit eindeutig festgelegte Begriffe, oder reale Objekte (Kraft, Personen, Dinge etc), wobei darauf Bedacht genommen werden muß, daß keine Ambiguitäten oder Heteronomien vorkommen.

Bestimmte Wortfolgen, die Sätze, sollen ebenfalls einen festen Sinn haben. In halbformalen Sprachsystemen soll nun das inhaltliche Schließen verträglich sein mit der kalkülmäßigen Herleitung von Sätzen (aus bereits gewonnen oder vorhandenen). "Halbformal" bedeutet also Kompatibilität von Inhalt und Form.

Insbesondere betrachten wir die Sprache der Mathematik, welche im allgemeinen durchaus inhaltlicher Weise über konkrete Dinge spricht, nämlich über die Mengen, die Zahlen, die Funktionen und andere mathematische Objekte.

Andererseits gibt es Sätze in der Mathematik, die nicht mehr in einem inhaltlichen Sinn aufgefaßt werden können, nämlich verbale Wort-Kombinationen, denen kein vernünftiger, "kognitiv-sinnvoller" Inhalt zugeordnet werden kann. Solche Sätze können jedoch als Sätze einer "ganzformalen Umgangssprache" angesehen werden, d.h. diese Sätze können aus einem hypothetisch als vorliegend angenommenen Axiomensystem der Mathematik mit Hilfe eines korrekten Regelsystems deduziert werden.

Wir nehmen zunächst an, daß für die Schlußweisen der Mathematik die klassische Quantorenlogik gilt, für welche wir den Frege-Lukasiewicz'schen Quantorenkalkül als Standardformalisierung wählen.

2) DER FREGE-LUKASIEWICZ'SCHE QUANTORENKALKÜL

"Q_{FL}"

Der dieser Arbeit zugrunde gelegte Frege-Lukasiewicz'sche Kalkül der Quantorenlogik, in dem die Formalisierung der klassischen ("naiven") Mengenlehre erfolgt, ist folgendermaßen aufgebaut:

$$"Q_{FL}" = \langle\langle "G", "F", "A", "R" \rangle\rangle$$

Er ist ein Quatrupel folgender Mengen von Grundzeichen, wohlgeformten Formen, Axiomen und Regeln:

$$"G" = \left\{ \begin{array}{l} \text{Individuenvariable: } a_i, b_i, c_i, \dots, x_i, y_i, z_i. \\ \text{Individuenkonstante: } a_i^0, b_i^0, c_i^0, \dots, x_i^0, y_i^0, z_i^0. \\ \text{Prädikatenzeichen: } A_i^n(\dots), \dots, Z_i^n(\dots). \\ \text{Funktorenzeichen: } a_i^n[\dots], \dots, z_i^n[\dots]. \\ \text{logische Operatoren: } \neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow \end{array} \right\}$$

$$"F" = \left\{ \begin{array}{l} \text{Aussagenvariable: } A_i^0(), \dots, Z_i^0(). \\ \text{Primformen: } A_i^n(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n), \dots, \text{wobei die} \\ \quad \psi_j \text{ Terme sind (Individuenvar., Individuenkonst.,} \\ \quad \text{mit Termen abgesättigte Funktoren), } Z_i^n(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n). \\ \text{zusammengesetzte Formen: } \neg \mathcal{U}, \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}, \mathcal{U} \wedge \mathcal{V}. \end{array} \right\}$$

$$"A" = \left\{ \begin{array}{l} (QA \times 1) \quad \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U} \\ (QA \times 2) \quad \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \\ (QA \times 3) \quad \neg \mathcal{U} \rightarrow \neg \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U} \\ (QA \times 4) \quad \bigwedge_x \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}(x/\psi) \\ (QA \times 5) \quad \bigwedge_x \mathcal{U}(x) \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}(x) \rightarrow \bigwedge_x \mathcal{V} \end{array} \right\}$$

$$"R" = \left\{ \begin{array}{l} \text{Modus ponens (MP)} \quad \mathcal{U}, \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \vdash \mathcal{V} \\ \text{Generalisierung (G*)} \quad \mathcal{U} \vdash \mathcal{U} \end{array} \right\}$$

($\forall$, es gibt ein) ($\wedge$, und) ($\vee$, oder) ($\leftrightarrow$, genau dann wenn)
Existenzquantor, Konjunktion, Disjunktion und Äquivalenz
werden auf die bekannte Weise mit Hilfe der Negation,
Implikation und des Allquantors festgelegt.

$$\begin{array}{l} \forall_x \mathcal{U} \Leftrightarrow \neg \bigwedge_x \neg \mathcal{U} \quad , \quad \mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \Leftrightarrow \neg (\mathcal{U} \rightarrow \neg \mathcal{V}) \quad , \\ \mathcal{U} \leftrightarrow \mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \wedge \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U} \quad , \quad \mathcal{U} \vee \mathcal{V} \Leftrightarrow \neg \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \quad . \end{array}$$

3) VOLLFORMALISIERUNG UND FORMALISIERUNG VON OBEN

Zu diesem Quantorenkalkül adjungieren wir die Identität als das einzige universelle Prädikat und setzen dafür das Reflexivitäts- und Substitutivitätsgesetz fest:

$$X = X \quad (\text{Ref})$$

$$X = Y \rightarrow \mathcal{U}(X) \rightarrow \mathcal{U}(Y) \quad (\text{Subst.})$$

Dadurch erhalten wir eine PIF-Logik (Prädikatenlogik mit Identitätszeichen und Funktorenvariablen, Fischer-Lexikon Mathematik I, Logik und Methodologie, S.209). In dieser PIF-Logik verwenden wir keine speziellen Prädikate und Funktoren außer der Elementschafft, welche wir durch ein stilisiertes Epsilon " ϵ " symbolisieren.

Analog zu dieser Vollformalisierung im Quantorenkalkül denke man sich die formale Umgangssprache der Mathematik, wo mit den Wörtern formal operiert wird. Man denke sich etwa, daß die Wörter nach festen Regeln gleichsam mechanisch in einem Satz oder in mehreren Satzfolgen hin und her geschoben werden können. Aus mehreren Grundbegriffen der Mathematik, wie Funktion, Zahl, Gruppe, Struktur, usw. (und nicht nur aus der Elementschäftsbeziehung) werden alle anderen Begriffe definitionell aufgebaut, mit Hilfe eines Definitionen-Systems aus mehreren Sprachschichten. Diese Formalisierung nennen wir im folgenden "Formalisierung von oben", im Gegensatz zur Vollformalisierung, welche eine Formalisierung von unten ist.

In einer solcherart formalisierten Mathematik (von oben oder von unten) hat die Mengenlehre eine zentrale Bedeutung, da sich auf ihr die anderen Disziplinen der Mathematik aufbauen lassen. Die "allgemeine Mengenlehre" ist also "ein Fundament der Mathematik" (so der Titel des Buches von Dieter Klau), und ihre Axiome sollen in dem oben charakterisierten hypothetischen Axiomen-System der Mathematik enthalten sein.

4. NAIVE MENGENLEHRE

Durch die Axiome der Mengenlehre wird hauptsächlich der Mengenbildungsprozeß geregelt.

Die naive Mengenlehre geht hier auf eine ganz natürliche Art und Weise beim Mengenbildungsprozeß vor. Wir haben die evident vorgegebenen Objekte der Mathematik: die Zahlen, Funktionen, gewisse elementare Mengen, etc.

Aus diesen Grundobjekten kann man auf eine natürliche evidente anschauliche klare Art und Weise Mengen konstruieren, indem man sie zu einer neuen Gesamtheit zusammenfaßt.

Georg Cantor, der Begründer der Mengenlehre, definiert eine Menge daher als "Zusammenfassung wohl-unterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen". Freilich wurde dagegen eingewandt, daß diese Definition genauso nichtssagend sei, wie die Definition des Punktes in der Geometrie. Nirgends wurde nämlich ein Rezept dafür angegeben, wie diese Zusammenfassung zu einem Ganzen zu erfolgen habe.

a.) Ungeordnete Menge, ordbare Menge, Enumeration

In der mathematischen Praxis wird eine Menge durch geschweifte Klammern " $\{ \dots \}$ " gekennzeichnet, zwischen welche die Objekte, die zu einer Menge zusammengefaßt werden, geschrieben werden, ohne Bedachtnahme auf ihre Reihenfolge und ohne Wiederholung. Beispiele:

$$\{a, b, c\} \equiv \{b, c, a\} \quad (\equiv \{a, b, c, a\} \text{ falsch!})$$

$$\{\text{Quine, Gödel, Church}\} \equiv \{\text{Church, Gödel, Quine}\}$$

$$\{5, 3, 0, 8\} = \{0, 3, 5, 8\} = \{8, 5, 3, 0\}$$

Mit diesen ungeordneten Mengen lassen sich geordnete Paare, Tripel, Quadrupel, ganz allgemein n -Tupeln definieren.

Def. geordnetes Paar

$$\langle x, y \rangle =_{\text{Def.}} \{ \{x\}, \{x, y\} \}$$

Def. n -Tupel

$$\langle x \rangle = x$$

$$\langle x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \rangle = \langle \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$$

Man kann aber auch von vornherein Mengen auf geordnete Art und Weise bilden

$$[c \geq a \leq b], \text{ oder } (a \leq b, a \leq c)$$

$$\text{oder } [a, b, c; a \leq b, a \leq c]$$

oder auf eine andere passende Weise. Ganz allgemein kann man daraus den Begriff einer "ordbaren" Menge herauschälen, deren Elemente geordnet oder auch ungeordnet sein können, indem etwa mit dem Individuen-Bereich auch Ordnungsrelationen der Elemente angegeben werden (Ordnungsgebilde, Struktur). Bei solchen Mengen ist eine Wiederholung der Elemente nicht möglich oder genauso unmöglich wie vorhin. Eine Wiederholung ist erst möglich, wenn man eine Menge als (Nachbereich einer) Funktion auffaßt. Im Falle eines wohlgeordneten (linearen) Vorbereiches erhalten wir die Enumeration oder Folge.

$$\langle a, b, c \rangle \neq \langle b, c, a \rangle \neq \langle c, a, b \rangle$$

$$\langle a, a, b, a \rangle \quad (\text{Wiederholung des "a" hier erlaubt})$$

b.) Klassenbildung und Mengenbildung

Im allgemeinen wird die Mengenbildung in der Mathematik so durchgeführt, daß zu einer vorgegebenen Eigenschaft E alle Dinge, auf welche diese Eigenschaft E zutrifft, zu einem neuen Ding zusammengefaßt werden, derart, daß dieses neue Ding alle Dinge mit der Eigenschaft E enthält.

Dies erfolgt im Gegensatz zu dem in den vorigen Beispielen dargelegten Mengen-Präsentator durch den Mengen-Operator

$$\{x: E(x)\} \quad \text{oder} \quad \{y: A(y)\}$$

Ein solcherart neugebildetes Ding nennen wir eine Klasse, anstelle von Eigenschaft E können wir auch Prädikat E oder offener Satz $E(x)$ sagen. Klassen sind also Prädikatenextensionen und aufgrund der Cantor'schen Mengendefinition wurden Mengen früher ebenfalls als Prädikatenextensionen gebildet ("Allgemeines Mengenbildungsprinzip").

Zu jeder Eigenschaft E gibt es eine Klasse X , welche die Prädikatenextension von E ist.

$$\forall \text{ Eig } E: \forall X. X = \{y: E(y)\}.$$

Dabei können die Dinge, welche mittels der Eigenschaft E zu einer neuen Gesamtheit zusammengefaßt werden, irgendwelche Ur-Elemente sein, z.B. reale Dinge oder Namen, aber auch Mengen oder Klassen selbst.

Bei einem verschärften Standpunkt der Mengenlehre werden die Ur-Elemente weggelassen, und nur die Mengen oder Klassen selbst wieder zu neuen Gesamtheiten zusammengefaßt. Wir bilden dann als Prädikaten-Extension die "Menge aller Mengen, welche die Eigenschaft E haben".

Man hat jedoch entdeckt, daß nicht alle derart gebildeten Gesamtheiten wieder als Elemente einer Menge verwendet werden können. Deshalb trennte man die derart neugebildeten Dinge in zwei Gruppen: in Klassen und Mengen.

Klassen sind alle Prädikaten-Extensionen, egal ob sie als Element auftreten oder nicht, und Mengen sind nur diejenigen Klassen, welche auch Elemente sein können.

c.) Symbolisierung durch Buchstaben

Bei unserer formalen Darstellung innerhalb der Zermelo-Fraenkel-Skolem'schen Mengenlehre oder der Neumann-Bernays-Bödel'schen Klassentheorie verwenden wir große lateinische Buchstaben, auch indiziert,

$A_i, B_i, C_i, \dots, X_i, Y_i, Z_i$
als Variable für Klassen, und kleine lateinische

Buchstaben, auch indiziert,
 $a_i, b_i, c_i, \dots, x_i, y_i, z_i$
als Variable für Mengen.

Den Sachverhalt, daß Mengen diejenigen Klassen sind, welche Elemente sind, drücken wir dann so aus:

$$Mg X \stackrel{\text{Def.}}{\longleftrightarrow} \forall y. X \in y.$$

Wenn in einer wohlgeformten Formel $\mathcal{U}$, kurz wg.F. $\mathcal{U}$, das ist die formale Übersetzung eines umgangssprachlichen Satzes, Klassen auftreten, welche Mengen sind, so kann man von den Großbuchstaben, welche die Klassen bezeichnen, zu den Kleinbuchstaben übergehen, und umgekehrt.

$$\begin{array}{l} Mg X \rightarrow \mathcal{U}(X) \vdash \mathcal{U}(x) \\ \text{und} \quad \mathcal{U}(x) \vdash Mg X \rightarrow \mathcal{U}(X) \\ \text{Zusammen:} \quad \mathcal{U}(x) \dashv\vdash Mg X \rightarrow \mathcal{U}(X). \end{array}$$

Diese Kleinschreibweisen für Mengen kann neben dieser Erklärung durch ein Regel-Schema " $\vdash$ ", wovon Zeile zu Zeile übergegangen wird, auch kontextuell eingeführt werden, wo gewisse Zeichenreihen durch die links vom Kontextual-Definitions-Zeichen " $\Leftrightarrow$ " stehenden Abkürzung ersetzt werden.

$$\mathcal{U}(x) \Leftrightarrow Mg X \rightarrow \mathcal{U}(X). \wedge \neg Mg X \rightarrow \mathcal{U}(\emptyset).$$

Da die Elemente einer Klasse immer Mengen sind und eine Klasse immer eine Zusammenfassung von Mengen ist, läßt sich der Klassenoperator folgendermaßen schreiben:

$$\{y: A(y) \wedge Mg y\} = \{y: A(y)\} \quad \text{oder} \\ x \in \{y: A(y)\} \leftrightarrow A(x) \wedge Mg x$$

Mengen von Mengen (oder Klassen von Klassen) können nicht immer gebildet werden, daß man mit zunehmender Entwicklung der Mengenlehre Widersprüche entdeckte, welche durch die uneingeschränkte Bildung von Mengen als absolute Prädikaten-Extension entstanden.

$$\exists \text{Eig. } E: \neg \forall x. x = \{y: E(y)\}. \quad (\text{z.B.: } E \equiv \neg y \notin y)$$

II. ANTI NOMIEN

1. Antinomien von Burali-Forti, Cantor und Russell

Als erste wurde die Antinomie von Burali-Forti (1897) entdeckt, welche darin liegt, daß die "Menge aller Ordnungszahlen" $\omega = \{x: Oz(x)\}$

ihren eigenen Ordnungstypus als Element enthält, nach der Definition des Ordnungstypus aber gar nicht enthalten kann.

Danach fand Cantor die Antinomie der "Menge aller Kardinalzahlen"

$$\aleph = \{x: Kz(x)\}$$

für welche analoges gilt, wie für die Menge aller Ordnungszahlen.

1.000

Ähnlich verhält es sich mit der "Menge aller Mengen", der Allmenge

$$V = \{x: x = x\}$$

welche mit ihrer Potenzmenge identisch ist, daher ihr eigenes Querelement q

enthält und somit von sich selbst verschieden-mächtig sein müßte, was trivialerweise unmöglich ist.

Schließlich entdeckte Russell die nach ihm benannte Antinomie der "Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten".

$$r = \{x: x \notin x\}$$

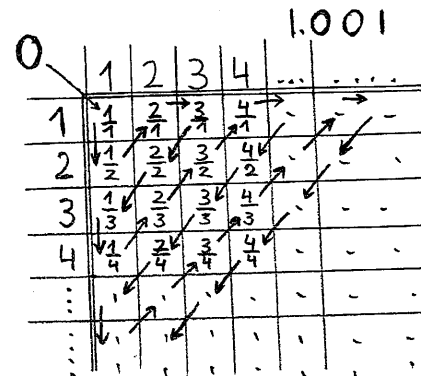
Diese Menge müßte sich selbst als Element enthalten und zugleich nicht enthalten.

2, Eine verallgemeinerte Darstellung der (Cantor'schen) Antinomie der ALL MENGE

Was bedeuten die hier benutzten Begriffe näher? Von den Mengen kann man durch Abstraktion zu den Ordnungstypen weiterschreiben, indem man von den speziellen Eigenschaften der Elemente absieht, wodurch dann die bloße Anordnung der Objekte überleibt. Der Ordnungstyp einer Menge ist also der Repräsentant ihrer Anordnung. Durch weitere Abstraktion, indem wir auch von der Anordnung der Objekte absehen, also nur ihre Anzahl betrachten, kommen wir zu den Mächtigkeiten. Die Mächtigkeit einer Menge ist also der Repräsentant der Anzahl der Elemente der Menge. Die Ordnungszahlen sind dann die Ordnungstypen der wohlgeordneten Mengen, und wohlgeordnet ist eine Menge genau dann, wenn sie so geordnet ist, daß jede Teilmenge davon ein erstes Element hat. Die Kardinalzahlen sind die Mächtigkeiten der wohlgeordneten Mengen. Cantor spricht in diesem Sinne von der zweifachen Abstraktion, durch welche wir die Kardinalzahlen aus den Mengen erhalten. Abzählbarkeit der rationalen Zahlen: $N \sim Q$

Weiters wissen wir, daß verschiedene unendliche Mengen gleichmächtig sein können, dh. daß eine ein-eindeutige Funktion zwischen ihnen bestehen kann. So sind etwa die rationalen Zahlen gleichmächtig mit den natürlichen Zahlen, was wir mit dem ersten Diagonalverfahren von Cantor beweisen (Siehe Fischer Lexikon, I, S.174).

Mathematik



0	↔	0
1	↔	1
2	↔	1
3	↔	2
4	↔	3
5	↔	4
6	↔	4
7	↔	3/2
8	↔	3/2
9	↔	4
10	↔	5
...	↔	...

Zwei Klassen heißen gleichmächtig, wenn eine ein-eindeutige Funktion zwischen ihnen besteht, das ist eine Funktion, deren Umkehrung auch eine Funktion ist. $A \sim B \Leftrightarrow \exists f: (f: A \rightarrow B) \wedge (f^{-1}: B \rightarrow A)$. Dem extensionalen Konzept entsprechend ist eine Funktion eine nach-eindeutige Klasse von geordneten Paaren.

$Fkt(F) \Leftrightarrow \bigwedge (x \in F \rightarrow \exists! y: x = \langle y, z \rangle) \wedge \bigwedge \langle u, v \rangle, \langle u, w \rangle \in F \rightarrow v = w$
Jeder Primärstelle eines geordneten Paares einer Funktion entspricht also genau eine Sekundärstelle.

Die Klasse aller Primärstellen einer Funktion nennt man ihren Vorbereitung

$$vb(F) \Leftrightarrow \{x: \exists y. \langle x, y \rangle \in F\}$$

die Klasse aller Sekundärstellen einer Funktion ihren Nachbereich

$$nb(F) \Leftrightarrow \{y: \exists x. \langle x, y \rangle \in F\}$$

"F ist eine Abbildung der Klasse A auf die Klasse B" bedeutet dann, daß F eine Funktion mit Vorbereitung A und Nachbereich B ist.

$$F: A \rightarrow B \Leftrightarrow Fkt(F) \wedge vb(F) = A \wedge nb(F) = B$$

"F ist eine Abbildung der Klasse A in die Klasse B" wenn jedem Element x aus A genau ein Element y aus B kraft F zugeordnet ist."

$(F: A \rightarrow B)$ oder $F: A \rightarrow \subseteq B \Leftrightarrow \bigwedge x \in A = vb(F) \rightarrow \exists! y \in nb(F):$
Dieses Element nennen wir den Funktionswert $F(x)$ von x unter der Funktion F.

$$F(x) \text{ oder } F'x \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in F.$$

y ... dasjenige y
wenn $\exists \dots = y$
wenn $\nexists \dots = \emptyset$

Die Funktionaleigenschaft kann aber auch eine Eigenschaft der formalen Sprache sein, etwa, wenn es zu jeder Primärstelle einer wohlgeformten Form genau eine Sekundärstelle gibt.

$$Fkt(u) \Leftrightarrow \bigwedge \langle u, v \rangle \wedge \langle u, w \rangle \rightarrow v = w.$$

1.010

b) Überabzählbarkeit der reellen Zahlen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_1$

Andererseits sind jedoch die reellen Zahlen nicht gleichmächtig mit den natürlichen Zahlen (und somit auch nicht mit den rationalen Zahlen). Wir beweisen dies mit Hilfe des zweiten Cantor'schen Diagonalverfahrens, indem wir ein Querelement q_F konstruieren. Wir nehmen an, es existiere eine Funktion F der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ auf die reellen Zahlen $\mathbb{R}_1$.

$$F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_1$$

oder sogar bloß auf das Reelle-Zahlen-Intervall $(0,1)$ zwischen 0 und 1,

$$F: \mathbb{N} \rightarrow (0,1)$$

und konstruieren mit dieser Funktion das Querelement q_F , welches wieder eine reelle Zahl sein muß.

$\mathbb{N} \xrightarrow{F} (0,1)$		Alle r_{ij} seien Ziffern:	
0	$\rightarrow r_0 = 0, r_{00} r_{01} r_{02} r_{03} \dots$	$\forall r_{ij} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$	
1	$\rightarrow r_1 = 0, r_{10} r_{11} r_{12} r_{13} \dots$		
2	$\rightarrow r_2 = 0, r_{20} r_{21} r_{22} r_{23} \dots$		
3	$\rightarrow r_3 = 0, r_{30} r_{31} r_{32} r_{33} \dots$		
4	$\rightarrow r_4 = 0, r_{40} r_{41} r_{42} r_{43} \dots$		
...	...		
z.B.	$r_{37} = 0, 2 \ 8 \ 5 \ 4 \ \dots \ 9 \ \dots$		
n	$\rightarrow r_n = 0, r_{n0} r_{n1} r_{n2} r_{n3} \dots r_{nn} r_{n(n+1)} \dots$		

$q_F = 0, s_{00} s_{01} s_{02} s_{03} \dots s_{nn} \dots$ wobei alle $s_{ij} \neq r_{ij}$,
z.B. wenn $r_{37,37} = 9$ ist, sei $s_{37,37} = 1 \neq 9$.

Diese Funktion hat jedoch keine natürliche Zahl n als ihr Argument, deren Funktionswert $F(n)$ das Querelement q_F sein könnte, weil sich dieses immer an der n -ten Stelle s_{nn} von r_n unterscheidet, da ja dessen n -te Stelle r_{nn} ist und wegen der Definition des Querelementes ungleich s_{nn} . Wir haben vorher angenommen, daß eine beliebige Zahl existieren möge, welche dies leistet, und erhielten als Essenz unserer Überlegung, daß diese beliebige Funktion dies nicht leisten kann. Daher kann es gar keine Funktion leisten, d.h. es gibt

1.011

c) Der Satz von Cantor: " $\mathbb{P}m \supset m$ "

überhaupt keine Funktion, welche die natürlichen Zahlen auf die reellen Zahlen abbilden kann. $\neg \forall F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_1$.

Durch Verallgemeinerung dieses zweiten Diagonalverfahrens erhalten wir, daß die Potenzmenge $\mathbb{P}m$, die Menge aller Teilmengen $\{x: x \subseteq m\}$ einer vorgegebenen Menge m , von größerer Mächtigkeit ist als die vorgegebene Basismenge m :

$$\mathbb{P}(m) = \{x: x \subseteq m\} \supset m.$$

Wir beweisen dies ebenso indirekt wie vorher, indem wir aus der Annahme einer Funktion F von der Menge m auf die Potenzmenge $\mathbb{P}(m)$ einen Widerspruch folgern.

$$F: m \rightarrow \mathbb{P}(m) \quad \vdash \quad \text{falsch}$$

Hierzu konstruieren wir ebenfalls das Querelement q_F der Funktion F

$$q_F = \{x: x \notin F(x) \wedge x \in \text{Vorbereich}(F)\}$$

$$q(F: m \rightarrow \mathbb{P}m) = \{x: x \notin F(x) \wedge x \subseteq m\}$$

Dieses Querelement q_F , falls es existiert und dies wollen wir wissen, ist eine Teilmenge der Menge m , des Vorbereichs der Funktion F . Daher ist es Element der Potenzmenge $\mathbb{P}(m)$, die ja die Menge aller Teilmengen der Menge m ist.

$$m \ni q(F: m \rightarrow \mathbb{P}m) \in \mathbb{P}m = \{x: x \subseteq m\}$$

Wenn nun die Funktion F die Menge m auf ihre Potenzmenge $\mathbb{P}m$ abbildet und das Querelement q_F Element der Potenzmenge ist, dann muß es auch als Funktionswert der Funktion F auftreten. Es gibt also irgendein Element der Menge m , welches als Argument der Funktion F den Funktionswert $F(x) = q_F$ liefert. Denken wir uns dieses Ding festgehalten und nennen es x^0 . Es gilt dann also

$$F(x^0) = q_F = \{x: x \notin F(x)\} \cap m$$

Wir können hier die Frage stellen, ob dieses $x^0 \in m$ auch Element seines Funktionswertes $F(x^0)$, dem Querelement q_F , ist.

$$x^0 \in F(x^0) \leftrightarrow x^0 \in \{x: x \notin F(x)\} \cap m = q_F$$

x^0 ist Element seines Funktionswertes, nämlich des Querelementes q_F , bedeutet jedoch, daß x^0 kein Element seines Funktionswertes ist, da das Querelement ja als "die Menge aller x , die kein Element ihres Funktionswertes sind" geschritten mit dem Vorbereich der Funktion definiert ist.

$$x^0 \in F(x^0) [\leftrightarrow x^0 \in q_F] \leftrightarrow x^0 \notin F(x^0) [\wedge x^0 \in m]$$

x^0 ist also Element seines Funktionswertes genau dann, wenn

es nicht Element seines Funktionswertes ist. Ein Widerspruch, aus welchem gefolgt werden muß, daß es keine Funktion von einer Menge auf ihre Potenzmenge geben kann.

$$\neg \forall f. f: m \rightarrow Pm.$$

Mit der Definition der Mächtigkeit lautet dieser Satz: $Pm \supset m$. Die Potenzmenge Pm ist immer größermächtig als die Basismenge m .

d) Allmengen-Paradoxie

Nehmen wir nun an, V ist die Menge aller Mengen, dann folgt, daß die Potenzmenge PV der Allmenge V größermächtig ist als die Allmenge V selbst:

$$PV \supset V$$

Hieraus folgt unmittelbar, daß die beiden nicht identisch sein können:

$$PV \neq V$$

Im Widerspruch dazu zeigen elementare logische Überlegungen, daß die beiden identisch sein müssen. Das bedeutet genau folgendes: $PV = V$

Wenn irgendeine Menge m Element der Allmenge V ist ($m \in V$), so ist sie auch Element der Potenzmenge PV der Allmenge V , d.h., sie ist eine Teilmenge $m \subseteq V$ der Allmenge V . Und umgekehrt, wenn sie Element der Potenzmenge PV ist, ist sie auch Element der Allmenge V :

$$m \in V \leftrightarrow m \in PV = \{x: x \subseteq V\}$$

Beweisen wir zunächst die eine Richtung von links nach rechts dieser logischen Äquivalenz: Die Allmenge enthält alle Mengen. Die Elemente x_i irgendeiner Menge m sind auch Elemente der Allmenge V , die Menge m selbst also eine Teilmenge $m \subseteq V$ der Allmenge V , also Element der Potenzmenge PV der Allmenge V .
 $\bigwedge_{x_i} x_i \in m \wedge m \in V \rightarrow x_i \in V. \iff m \subseteq V, \rightarrow m \in PV.$

Der Beweis der Gegenrichtung lautet: Ein Element der Potenzmenge ist jedenfalls eine Menge (erstens weil ein Element prinzipiell eine Menge ist, und zweitens die Elemente der Potenzmenge die Teilmengen der Allmengen sind, und eine Teilmenge ja immer eine Menge ist), und somit Element der Allmenge, welche ja alle Mengen enthält.

Wir bekamen also einerseits, daß die Potenzmenge der Allmenge größermächtig ist als die Allmenge und somit ungleich, andererseits, daß sie mit ihr identisch ist.

Derselbe Widerspruch, anders lautend, könnte so gezeigt werden: Nehme ich nun an, es gibt eine Funktion von der Allmenge V auf ihre Potenzmenge PV , so sehe ich, daß das Querelement q_v , genau: $q(f: v \mapsto Pv)$,

Element der Potenzmenge sein müßte, da es eine Teilmenge der Allmenge ist, andererseits jedoch wegen seiner Konstruktion (siehe oben) kein Element davon sein kann, und daher keine Funktion zwischen der Allmenge und ihrer Potenzmenge existieren kann. D.h. die Allmenge ist verschiedenmächtig von ihrer Potenzmenge, welcher Sachverhalte, nämlich daß jede Menge größermächtig als ihre Potenzmenge ist, ja für alle Mengen gilt. Da jedoch die Potenzmenge der Allmenge identisch mit der Allmenge ist, müßte die Allmenge verschiedenmächtig von sich selbst sein. Es könnte also keine Funktion von der Allmenge auf die Allmenge existieren, was klarerweise falsch ist, da ja die Identität

$$I = \{\langle x, x \rangle : x = x\} = \{\langle x, x \rangle : \text{Verum}\}$$

die Allmenge auf sich selbst abbildet.

Diese Antinomie ist jedoch nicht so in der logischen Struktur der definierenden Begriffe verwurzelt wie die Russell'sche Antinomie. Sie ist nur herleitbar aufgrund der willkürlichen Festsetzung der Mächtigkeitsbeziehungen zwischen Menge und Potenzmenge. Die Willkürlichkeit besteht insbesondere in der Forderung, daß das Querelement einer Funktion, die eine Menge auf die Potenzmenge abbildet, immer und für alle Mengen existieren soll. Schränken wir jedoch diese Forderung in der Weise ein, daß das Querelement nur für "normale" Mengen existieren soll, jedoch für die Allmenge bspw. nicht, so ist der Sachverhalt $PV \supset V$ und somit $PV \neq V$ nicht beweisbar.

3.) Die Russell'sche Antinomie

Russell entdeckte die Antinomie der

"Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten".

$$\exists r = \{x: x \notin x\} \quad \vdash \quad \perp$$

Russell, der sehr viel Sinn für Humor hatte, formulierte sie in dem bekannten Beispiel des Barbiers, der mit dem Bürgermeister eines englischen Ortes den Vertrag abschloß, genau die Bewohner des Dorfes zu rasieren, die sich nicht selbst rasieren. Als er am Ende des Jahres den Bürgermeister aufsuchte, um seinen Gehalt zu fordern, verweigerte dieser die Bezahlung mit der Begründung, er habe den Vertrag nicht eingehalten. Er habe sich nämlich selbst rasiert. Da er jedoch vereinbart hatte, nur diejenigen zu rasieren, die sich nicht selbst rasieren, hätte er sich nicht rasieren dürfen. Der Barbier eilt von dannen und denkt, ein zweites Mal passiert ihm das nicht, engagiert sich jemand anderen, der ihn von nun an rasiert. Als er am nächsten Jahresende wieder zum Bürgermeister kommt, verweigert der ihm wieder die Bezahlung mit der Begründung, er habe den Vertrag nicht eingehalten, er habe sich nicht rasiert. Da er aber genau die Bewohner des Ortes, die sich nicht selbst rasieren, rasieren sollte, hätte er sich ja selbst rasieren müssen. Was sollte der Barbier tun, um den Vertrag einhalten zu können? Die Antwort ist fatal: Gar nichts, denn er kann den Vertrag prinzipiell nicht erfüllen. Der Vertrag ist so konzipiert, daß er prinzipiell unerfüllbar ist. Der Barbier kann nur einen anderen Vertrag abschließen, um zu seinem Geld zu kommen.

Ganz analog verhält sich der Sachverhalt bei der "Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten". Das Beispiel des Barbiers ist eine Interpretation dieser Menge. Hier wird die Elementschaff als Rasieren interpretiert. Die Russell-Klasse R kann keine Menge r sein. Wäre sie eine Menge, so wäre folgende Situation gegeben: enthielte sie sich selbst als Element, so dürfte sie sich andererseits nicht als Element enthalten, da sie genau diejenigen Mengen als Elemente enthält, die sich nicht selbst als Element enthalten. Enthielte sie sich selbst jedoch nicht als Element, so müßte sie sich per definitionem jedoch als Element enthalten, da sie ja die Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, und das gilt auch für sie, als Element enthalten soll:

$$r \in R = \{x : x \notin x\} \leftrightarrow r \notin r$$

An diesem Beispiel wird deutlich, daß eine so definierte Russell'sche Menge r ein in sich widerspruchsvoller Begriff ist, welcher daher nicht gebildet werden darf. Genauso ist es möglich, daß mehrere Begriffe zusammen, oder genauer, die Existenz mehrerer solcherart definierter Begriffe, einen Widerspruch erzeugen.

4. Ultimal-Klassen und außerordentliche Mengen

Durch die Kenntnis dieser Antinomien gelangte man zu der Auffassung, Mengenbildungsprozesse seien nur dann erlaubt, wenn die Mengen auf eine natürliche und evidente Weise "von unten her" konstruiert werden, nach dem in der Mathematik üblichen Formalisierungsgrundsatz, daß "die Elemente ihrer Menge gegenüber präexistent" sein müssen. Dh. ich kann eine Reihe von vorgegebenen natürlichen Zahlen $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$, zu einer Menge $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ zusammenfassen, ich kann zu einer bereits existierenden Menge m die Menge aller Teilmengen $P_m = \{x : x \subseteq m\}$ bilden, eine Teilklasse T einer Menge m soll wieder eine Menge sein

$$Mg\ M \wedge T \subseteq M \rightarrow Mg\ T,$$

und auch die Leerkasse $\{\} = \{x : x \neq x\}$

soll eine Menge sein, nämlich die Nullmenge $\emptyset$.

Hingegen können Dinge, welche mit dem Universum umfanga- gleich sind, in der naiven Mengenlehre und in den meisten axiomatischen Mengenlehre-Systemen, bzw. Klassentheorien, nicht als Menge gebildet werden: z.B.

$$\text{Allklasse} \quad V = \{x : x = x\}$$

$$\text{Russell-Klasse} \quad R = \{x : x \notin x\}$$

$$\text{Ordinalzahlen-Klasse} \quad \Omega = \{x : 0 \leq x\}$$

etc.

Es hat sich also die Meinung durchgesetzt, daß Ultimal-Klassen auch Proper-Klassen sein müssen, das sind

Klassen, die keine Mengen sind.

Weiters bleibt die Frage offen, nach der Existenz von reflektiven Mengen m , welche sich selbst als Element enthalten ($m \in m$), bzw. allgemeiner, von außerordentlichen Mengen ("extra-ordinary sets"), welche eine unendliche absteigende Elementfolge besitzen. Solche Mengen genügen dem obigen Formalisierungsgrundsatz der Elementen-Präexistenz nicht.

Es gibt daher noch keinen Weg der Formalisierung von Begriffen, die sich in ihrem Definiens selbst enthalten "self-referring names", pseudo-names), etwa der Begriff "Wort", der selbst ein Wort ist.

Nach obigem Formalisierungsgrundsatz dürfte bspw. die "Menge aller Abstrakta", welche ja selbst ein Abstraktum ist, nicht gebildet werden. (Die Tatsache, daß diese Menge selbst ein Abstraktum ist, wird metasprachlich aufgrund semantischer Überlegungen entschieden und kann danach als Axiom eingeführt werden.)

$$\text{Abstr.} = \{x : \text{Abstr}(x)\}$$

10.000

Es besteht also noch die Aufgabe für die Mengenlehre, eine Theorie der reflexiven, außerordentlichen oder nicht-fundierten Mengen zu begründen, in welcher semantische Paradoxien, wie etwa

"Das Wort "lang" ist selbst kurz",
oder "heterologisch ist autologisch",
oder "prädikatibel ist imprädikatibel"

nicht ableitbar sind.

Die Grelling'sche Paradoxie (1908) der heterologischen, oder nicht-selbst-deskriptiven, Adjektive entsteht aus der Frage, ist das Adjektiv "heterologisch" autologisch oder heterologisch? Das Adjektiv "kurz" ist kurz: es ist wahr von sich selbst, es ist autologisch. Das Adjektiv "lang" ist kurz, es ist kein langes Adjektiv: es ist nicht wahr von sich selbst, es ist heterologisch. Ist nun das Adjektiv "heterologisch" ein autologisches oder heterologisches Adjektiv?

Wann ist eine Prädikatenextension eine Menge?

Wenn gewisse "mit dem Universum umfangsgleiche" Ultimal-Klassen nicht zu Mengen gemacht werden dürfen, oder, anders gesagt, wenn mit dem Wahrheitsprädikat umfangsgleiche Prädikate keine Mengen komprimieren können, was bedeutet das? Wann kann in der naiven Mengenlehre eine Gesamtheit von Objekten als Menge aufgefaßt werden, ohne daß daraus ein Widerspruch hergeleitet werden kann? Man versuchte dieser heiklen Frage dadurch auszuweichen, indem man nur gewisse Mengenbildungen zuließ, welche anschaulicher Weise als erlaubt gelten. So schuf man einen engen konsistenten, d.h. widerspruchsfreien Rahmen der Mengenlehre, wo nur wenige als gesichert geltende Mengenbildungen erlaubt sind. In einer solcherart konzipierten axiomatischen Mengenlehre werden mit Hilfe einer Reihe festgelegter Axiome die neuen Mengen aus bereits gewonnenen Mengen konstruiert. Hier nahm man elementare Dinge auf: die Existenz der Null-Menge $\emptyset$, Einer-Menge $\{ \cdot \}$, Paar-Menge $\{ \cdot, \cdot \}$, Verschmelzungs-Menge Σ , Teilmengen ($\subseteq$), Potenz-Menge P , Bildmengen und Natürliche-Zahlen-Menge $\mathbb{N}$.

Drücken wir diese Existenz mittels Klassenvariablen und Mengenprädikat aus, erhalten wir eine Klassentheorie.

10.001

III. DIE AXIOMATISCHEN MENGENLEHREN (Standard-Systeme)

1. Die NEUMANN-BERNAYS'sche Klassentheorie NB

$Mg \emptyset$	Nullmenge
$Mg A \rightarrow Mg \{A\}$	Einermenge
$Mg A \wedge Mg B \rightarrow Mg \{A, B\}$	Paarmenge
$Mg A \rightarrow Mg \Sigma A$	Verschmelzungs-menge
$Mg A \wedge A \supseteq B \rightarrow Mg B$ oder $Mg A \rightarrow Mg A \cap B$	Teilmenge (Aussonderung)
$Mg A \rightarrow Mg P A$	Potenzmenge
$Mg A \wedge (F: A \mapsto B) \rightarrow Mg B$ oder $Fkt F \wedge Mg \text{Vorbereich } F \rightarrow Mg \text{Nachbereich } F$ oder $Fkt F \mapsto Mg A \rightarrow Mg F^A$	Bildmenge
$Mg \mathbb{N}$ oder $Mg \odot_n Fin$	Natürliche-Zahlen-Menge
paarweise Jede Menge nichtleerer disjunkter Mengen hat eine Auswahl-Menge.	
$A = B \leftrightarrow \bigwedge y. y \in A \leftrightarrow y \in B$	Gleichheit
$\forall Eig. E: \bigvee_{kl} x. x = \{y: E(y) \wedge Mg y\}$	Allgemeine Klassen-Existenz

10.010

Bei der Axiomatisierung der Mengenlehre durch

von Neumann wurden die durch eine Zusammenfassung von Objekten entstandenen Gesamtheiten in zwei Entitäten-Gruppen geteilt: ^{ihre} Reine Prädikatenextensionen sind Klassen, und gewisse Klassen werden mit Hilfe der Mengenexistenz-Axiome als Mengen ausgezeichnet. Wir bezeichnen daher eine solche Axiomatisierung als Klassentheorie. In ihr wird das Aussonderungsaxiom $(\exists \subseteq_B)$ meist als Teilmengenaxiom, "eine Teilklasse B einer Menge A ist selbst eine Menge", formuliert, das Ersetzungsaxiom $(\exists B_F)$ als Bildmengenaxiom

"das Bild F^*A einer Menge A unter einer Funktion F ist selbst eine Menge".

Um das Auswahlaxiom (AC) (Axiom of Choice), sowie den Wohlordnungssatz und das Zorn'sche Lemma, als äquivalente Formulierungen desselben, wurde in der Vergangenheit ein heftiger Grundlagenstreit geführt.

Die Beziehung zwischen der durch das Reflexivitäts- und Substitutivitäts-gesetz festgesetzten Gleichheit "=" und der Elementarschaft " $\in$ " wird in der Mengenlehre wegen deren extensionalem Standpunkt durch das Extensivitätsaxiom geregelt.

2.) Die ZERMELO-FRAENKEL'sche Mengenlehre ZF

Mengentheoretische Gleichheit ist also Umfangsgleichheit (der Prädikatenextension). Die Variablen in diesen Axiomen wurden mit lateinischen Grossbuchstaben geschrieben, welche ja Klassen symbolisieren, und wenn diese Klassen Mengen waren, so wurde dies durch das Prädikat "Mg" vermerkt. Unter Verwendung der erwähnten Konvention, dass Klassen, die Mengen sind, durch kleine lateinische Buchstaben dargestellt werden, lassen sich die genannten Axiome auch folgendermassen formulieren, wobei wir sie gleich in expandierter Darstellung aufschreiben:

"Es gibt eine Menge x, welche keine Mengen y enthält."

$$(\exists \emptyset) \forall \Delta. \forall y \notin x.$$

"Es gibt eine Menge x, welche genau die Menge a oder die Menge b (oder beide) als Element enthält."

$$(\exists \{, \}) \forall \Delta. (\forall y \in x \leftrightarrow y = a \vee y = b).$$

"Es gibt eine Menge x, welche alle Elemente y eines Elementes z der Menge a enthält, und nur diese y."

$$(\exists \supseteq) \forall \Delta. (\forall y \in x \leftrightarrow \forall z: y \in z \wedge z \in a).$$

"Es gibt eine Menge x, welche genau alle Elemente y der Menge a enthält, welche die Eigenschaft B haben."

$$(\exists \subseteq_B) \forall \Delta. (\forall y \in x \leftrightarrow y \in a \wedge B(y)).$$

10.011

"Es gibt eine Menge x, welche genau alle Teilmengen y der Menge a enthält."

$$(\exists P) \forall \Delta. (\forall y \in x \leftrightarrow y \subseteq a).$$

"Es gibt eine Menge x, welche genau alle Ersetzungen y einer funktionalen wohlgeformten Formel F als Element enthält, deren Primärstelle z Elemente einer vorgegebenen Menge a sind."

$$(\exists F) \forall \Delta. (\forall y \in x \leftrightarrow \forall z: F(z, y) \wedge z \in a).$$

"Es gibt eine Menge x, welche die Null und mit jedem Element y auch seinen Nachfolger $y \cup \{y\}$ enthält."

$$(\exists \infty) \forall \Delta. (\emptyset \in x \wedge \forall y: y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x).$$

"Zu jeder Menge a, deren Elemente y nicht leer sind, und deren je zwei Elemente y_1 und y_2 disjunkt sind (d.h., dass ihr Durchschnitt leer ist), existiert eine Auswahlmenge x, die von allen Elementen y von a genau ein Element z besitzt."

$$(AC) \forall \Delta. y \in a \rightarrow y \neq \emptyset. \wedge \forall y_1 \forall y_2. y_1 \in a \wedge y_2 \in a \rightarrow y_1 \cap y_2 = \emptyset. \\ \longrightarrow \forall \Delta. y \in a \rightarrow \exists! z: z \in y \cap x.$$

"Die Menge a und die Menge b sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente y haben."

$$(E) a = b \leftrightarrow \forall \Delta. y \in a \leftrightarrow y \in b.$$

Zermelo schuf dieses axiomatische Mengenlehre-System in den Zwanziger Jahren und Fraenkel fügte das Ersetzungsaxiom hinzu. Dieses Zermelo-Fraenkel'sche System gilt heute als das Standard-System der axiomatischen Mengenlehre, mit welchem ein grosser Teil der naiven Mengenlehre aufgebaut werden konnte. Seit der Existenz dieses Systems versucht man, seine Widerspruchsfreiheit zu beweisen, was jedoch bisher noch nicht gelungen ist. Andererseits aber ist seine Widerspruchsfreiheit quasi experimentell gesichert, da in den letzten 40 Jahren kein Widerspruch daraus hergeleitet werden konnte.

Ein solches Mengenlehre-System kann ganz ohne den Begriff Klasse auskommen. Er ist eliminabel (eliminitive Klassentheorie) und kommt in obigem System auch tatsächlich nicht vor. Existierende Objekte sind eben nur Mengen, und von zu Antinomien führenden Dingen, wie der Russell-Menge, wird keine Existenz verlangt.

Aus praktischen Gründen verwendet man jedoch entweder semantische Variablen (deutsche Buchstaben) oder (nicht-quantifizierbare) Halb-Variablen (für welche bloß eine Einsetzungsregel gilt) für eliminative Klassen, oder man benützt ein Mischsystem, wo auch die mit eigner Variablensorte symbolisierten Klassen-Variablen quantifiziert werden.

Diese Erleichterung ermöglicht uns, das Verschmelzungsmengen-Ax. ($\exists Z$) das Aussonderungs-Axiom ($\exists \subseteq$), und das Ersetzungs-Axiom ($\exists \equiv$) zu einem einzigen Axiom, dem Bild-Ersetzungs-Axiom ($\exists B_F$) zusammenzufassen:

"Es gibt eine Menge x , welche genau alle ^{Elemente von} Funktionswerten F einer Funktion F als Element enthält, deren Argumente z Elemente einer vorgegebenen Menge a sind."

$$(\exists B_F) \quad \forall x \bigwedge y. (y \in x \leftrightarrow \forall z: y \in F'z \wedge z \in a).$$

In der ZF-Mengenlehre wird an Stelle des Omega-Existenz-Axioms ($\exists \Omega$) das Unendlichkeits-Axiom ($\exists \infty$) verwendet. Da die endliche-Ordinal-Zahlen-Menge Ω die engste aller dieser unendlichen Mengen ist, dh. der Durchschnitt von ihnen, folgt ihre Existenz aus dem Unendlichkeits-Axiom durch Aussonderung:

$$\Omega = "\infty" \cap \{u: \bigwedge x. (\emptyset \in x \wedge \bigwedge y: y \in x \rightarrow y' \in x) \rightarrow u \in x.\}$$

Omega ist fundiert, dh. jede nicht-leere Teilmenge davon besitzt ein $\in$ -minimales Element, dh. ein solches, welches mit ihr leeren Durchschnitt hat.

$$\text{Fund } \Omega \quad ; \quad \text{Fund } X \subseteq \bigwedge z. \emptyset \neq z \subseteq X \rightarrow \bigvee y: y \in z \wedge y \cap z = \emptyset.$$

Diese Tatsache ist für ein mengentheoretisches System sehr wichtig, um die transfinite Induktion und Rekursion begründen zu können.

Manchmal wird zu ZF noch das Fundiertheits-Axiom hinzugenommen "Alle Mengen sind fundiert".

$$(\text{Fund}) \quad \bigwedge x. \text{Fund}(x).$$

Um die Zermelo-Mengenlehre später erweitern zu können, verwenden wir im folgenden an Stelle von ZF das aus didaktischen Gründen umgeformte System ZF'', wobei die beiden Striche auf diese Veränderungen hinweisen: 1.) an Stelle des Unendlichkeits-Axioms verwenden wir das Omega-Existenz-Axiom $\forall x. y \in x \leftrightarrow 0 \in y \wedge \bigvee z: z \in y$. 2.) im Aussonderungs- und Ersetzungs-Axiom wird die vorgegebene Basis auf fundierte Mengen eingeschränkt. ... $y \in a$..., ... $z \in a$...

3. Typentheorie (Russell) TY

Den Intentionen des mathematischen Formalisierungsgrundsatzes entsprechend schuf Russell seine Typentheorie zur Überwindung der Widersprüche. Der Typentheorie liegt ein mehrsortiger Kalkül zugrunde, denn ihre Individuenvariablen können von verschiedenen Typ sein, welcher rechts oberhalb des Individuenbuchstaben steht.

$$a_i^n, b_i^n, c_i^n, \dots, x_i^n, y_i^n, z_i^n.$$

Die Atomformeln " $\in$ " der Typentheorie sind so beschaffen, dass die Variablen links und rechts vom " $\in$ " von konsekutivem Typ sind: " $x^n \in y^{n+1}$ ". Aus diesen Atomformeln werden nach den üblichen Formationsregeln die wohlgeformten Formeln aufgebaut.

Das Church-Schema (Konkretionsgesetz) lautet hier

$$y^n \in \{x^n: A(x^n)\} \leftrightarrow A(y^n),$$

und das Axiomenschema der Mengenkompensation

$$\bigvee_{x^{n+1}} \bigwedge y^n. y^n \in x^{n+1} \leftrightarrow A(y^n).$$

Wegen ihrer technischen Kompliziertheit konnte sich die Typentheorie jedoch trotz ihrer Konsistenz nicht durchsetzen, obwohl Russell in dem vielzitierten und wenig gelesenen Werk "Principia Mathematica" einen grossen Teil der Mathematik darauf begründete.

4. Quine's "New Foundation" NF

Die Zermelo-Fraenkel'sche Mengenlehre ZF wurde nun zum Aufbau der diversen Teildisziplinen der Mathematik verwendet. Der sehr enge Rahmen dieses ZF-Systems wirft jedoch bei der Begründung einzelner Disziplinen Fragen auf, welche die Bemühungen, den axiomatischen Kern der Mengenlehre umfassender zu gestalten, intensivierten.

Quine entwickelte aus der Typentheorie die Systeme "Mathematical Logic" ML und "New Foundation" NF, indem er im Frege-Schema nur stratifizierte, d.h. geschichtete Formeln zur Mengenbildung zuließ. Die geschichteten Formeln sind solche, die sich in Formeln der Russell'schen Typentheorie umschreiben lassen, dadurch, dass den generellen Individuen-Variablen ein Typenindex angehängt wird, sodass die umgeschriebene Formel eine Formel der Russell'schen Typentheorie wird. D.h. die Variablen-Typen links und rechts vom Epsilon müssen in einer konsekutiven Folge stehen, also die Variable links vom Epsilon ist genau um einen Typ tiefer als die Variable rechts vom Epsilon. Z. B.:

$$x^0 \in y^1 \wedge y^1 \in z^2 \rightarrow \bigvee u. x^0 \in u^1 \wedge u^1 \in z^2.$$

Formeln, die dieser Bedingung genügen, nennen wir stratifiziert.

Quine benützt auch den Gedanken von Neumanns, dass gewisse Ultimalklassen als Mengen adjungiert werden. So ist beispielsweise die Formel " $x=x$ " stratifiziert und daher die All-Klasse eine Menge im NF-System. Die in der Mathematik verbreitete Ansicht, dass mit dem Universum umfangsgleiche Klassen keine Mengen sind, gilt also in den Stratifikations-Systemen nicht. New Foundation NF hat ausserdem den Vorteil, dass es bezüglich den Boole'schen Operationen abgeschlossen ist. Wir wissen, dass die distributiv-komplementären Verbände in der Mathematik eine grosse Rolle spielen. Das sind Mengen, über denen gewisse Operationen ausgeführt werden dürfen. (Siehe Tabelle) So existiert zu jedem Element eines distributiv-komplementären Verbandes auch sein Komplement, zu je zwei Elementen davon der Durchschnitt und die Vereinigung, und es gelten die Distributivgesetze für die Vereinigung von Durchschnitten und die Durchschnitte der Vereinigungen. Das Quine'sche System hat also den Vorteil gegenüber der ZF-Mengenlehre, dass zu jeder Menge m auch ihr Komplement $\bar{m}$ als Menge existiert. In ZF ist das Komplement einer Menge stets eine Proper-Klasse, also eine Ummenge. NF hat jedoch den Nachteil, dass es 1. mit dem Auswahl-Axiom unverträglich ist, 2. Omega-inkonsistent ist, 3. gewisse paradoxe Sachverhalte in ihm gelten.

a) Die Unverträglichkeit des Systems NF mit dem Auswahl-Axiom

Wir wissen, dass in der Mathematik das Auswahl-Axiom (oder der dazu äquivalente Wohlordnungssatz, oder das dazu äquivalente Zorn'sche Lemma) eine grosse Rolle spielt. Das Auswahl-Axiom besagt, dass zu jeder Menge nicht-leerer disjunkter Mengen eine Auswahl-Menge existiert. Das ist eine solche Menge, die aus jedem Element der vorgegebenen Grundmenge genau ein Element enthält.

Betrachte ich etwa einen Menschen als die Menge aller seiner Organe, (Zellen oder Atome), so ist eine Auswahlmenge der Menge zweier Geschwister jede Gesamtheit, welche aus jedem Geschwisterteil genau ein Organ (Zelle oder Atom) enthält. Eine solche Auswahlmenge muss jedoch nicht existieren, wenn die Menge nicht disjunkt ist. diesem Fall entspricht in unserem Beispiel eine Menge eines siamesischen Zwillingspaars, welche keine Auswahlmenge haben muss.

Ein formales Beispiel sei etwa:

Die Menge $\{\{a,b\}, \{c\}, \{d\}\}$

besitzt die Auswahlmengen $\{a,c,d\}$ und $\{b,c,d\}$.

Die Menge $\{\{a,b\}, \{a\}, \{b\}\}$

hat
hingegen keine
Auswahlmenge,

weil eine Menge von Elementen der Elemente dieser Menge nur die Menge $\{a,b\}$ sein kann, welche nicht aus jedem Element genau ein Element enthält, da sie ja aus dem Element $\{a,b\}$ zwei Elemente enthält.

Das Auswahl-Axiom ist für die Formal-

Mathematik eine naheliegende Festsatzung. Gödel hat nämlich in seiner berühmten Arbeit "The Consistency of the Axiom of Choice and the generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set-theory" (1940) in einem modelltheoretischen Beweis gezeigt, dass die um das Auswahl-Axiom (AC) vermehrte ZF-Mengenlehre widerspruchsfrei ist, wenn nur die ZF-Mengenlehre selbst widerspruchsfrei ist.

Als Regel formuliert präsentiert sich das Auswahl-Axiom als Quantoren-Eliminations-Regel (QELR): Man darf von Formeln, an deren Anfang ein Existenzquantor steht, übergehen zu denjenigen Formeln, wo der Existenz-Quantor gestrichen und an Stelle der von ihm gebundenen Variablen ein Funktionszeichen eingeführt wird.

$$\bigvee_x A(x, y_1, \dots, y_n) \vdash A(f(y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n)$$

Hilbert nennt dies den Prozess der symbolischen Auflösung.

Beweistheoretisch ist das Auswahl-Axiom äquivalent zur Quantoren-Eliminations-Regel (QELR). Das verstärkte (AC) mit dem Auswahl-funktor " ε " formuliert, lautet "ein Element x der Klasse A gibt es genau dann, wenn das gewählte Element εA aus A Element von A ist."

$$\bigvee_x x \in A \leftrightarrow \varepsilon A \in A$$

ergibt mit Hilberts " ε "-Operator geschrieben

$$\bigvee_x A(x, y_1, \dots, y_n) \leftrightarrow A((\varepsilon_x A x y_1 \dots y_n), y_1, \dots, y_n)$$

eine modifizierte (QELR)

$$\bigvee_x A(x, y_1, \dots, y_n) \dashv\vdash A(f^n(y_1 \dots y_n), y_1, \dots, y_n)$$

in der die Äquivalenz durch das Regel-schema-Zeichen " $\dashv\vdash$ " und die Zeichenreihe " $\varepsilon_x A x$ " rechts von der Äquivalenz durch den noch nicht verwendeten n -stelligen Funktions-Buchstaben " f^n " ersetzt wird.

Die durch Hinzunahme der (QELR) zum Quantorenkalkül erzeugte konservative Erweiterung einer Theorie T ist jedoch zu dieser relativ konsistent.

$$\text{Erw}_{\text{cons}}(T + (\text{QELR}), T), \text{Rel Cst}(T + (\text{QELR}), T)$$

Von diesem kurz formulierten Axiom "das gewählte Element einer nicht-leeren Menge ist Element dieser Menge" kann man übergehen zu der in der Mathematik üblichen Form des Auswahl-Axioms "jede Menge nicht-leerer paarweise disjunkter Mengen besitzt eine Auswahlmenge", welches sich aus ersterem herleiten lässt.

Theorien, in welchen die Existenz-Quantoren solcherart eliminiert wurden, 11.000
bleiben widerspruchsfrei, wenn sie es vor der Elimination bereits waren.

Parallel zu dieser beweistheoretischen relativen Widerspruchsfreiheit einer Theorie zu ihrer quantoren-eliminierten Theorie verläuft ein modell-theoretischer Beweis. Dieser kann jedoch nur geführt werden, wenn zusätzlich zur Existenz (Existenz-Quantor) die Eindeutigkeit vorliegt. Dh. ein Funktionszeichen kann modell-theoretisch nur dann eingeführt werden, wenn die Formel lautet "Es gibt genau ein $(\exists!)$ Ding, welches die Eigenschaft E besitzt": $\forall x (A(x, \gamma_1, \dots, \gamma_n) \rightarrow A(f(\gamma_1, \dots, \gamma_n), \gamma_1, \dots, \gamma_n))$.

Für die Inhaltliche Mathematik (Substanz-Mathematik) ist das Auswahl-Axiom keineswegs trivial. Denn für sie ist nicht nur die Widerspruchsfreiheit, sondern auch die Adäquatheit ihrer Formalisierungen von Bedeutung. Dh. die Formalisierung soll den inhaltlichen Sinn der mathematischen Aussage in einer zumindest brauchbaren Weise wiedergeben, wenn nicht sogar wirklichkeitsgetreu widerspiegeln.

Das Quine'sche System ist also mit dem Auswahl-Axiom unverträglich.

Für die S-Mathematik bleibt also die Frage offen, ob (AC) mit der jeweils behandelten Theorie kompatibel ist. Es ist durchaus möglich, daß die Hinzunahme von (AC) zu einer Theorie T deren Omega- oder Term-Inkonsistenz auslöst.

$$\Diamond: \sim T - \text{Cst}_{\text{rel}}(T + (AC), T)$$

FORMAL-Math.	SUBSTANZ-Math.
Formale Umgangssprache FU Sprach-Kalkül usus-offenes Axiomensystem Regelschema	Inhaltliche Sprache Objekt-Ebene $\equiv$ Meta-Ebene (evident gegebene) Objekte, Funktionen Inhaltliches Schließen
Formalisierungen davon:	
1. Konsistenz 2. Adäquatheit, Ω -u. Term-Konsist. FI-Covariant $\text{RelCst}(T + (AC), T)$ $\text{Cst}(\exists! Pa + \exists! Anb)$	1. $\begin{cases} \text{Konsistenz} + \text{Adäquatheit}, \\ \Omega\text{-u. Term-Konsistenz} \end{cases}$ FI-Invariant $\text{RelCst}(\sim T - \text{Cst}(T + (AC), T), T)$ Imprädiaktiv $(\exists! Pa + \exists! Anb)$

11.001

b) Die Omega-Inkonsistenz des Systems NF

Die Omega-Konsistenz besagt folgendes: in der Zahlentheorie kann etwa ein Satz für alle natürlichen Zahlen beweisbar sein, d.h. es gilt A für die Null, A für die Eins, A für die Zwei, usw., kurz, für jede natürliche Zahl N ist der Satz A beweisbar.

$$\vdash A(0), A(1), A(2), \dots, A(n), \dots$$

$$\forall n: \vdash A(n) \quad (n \text{ metasprachlich})$$

Diese Notation bedeutet, daß das Satzschema $\{A(0), A(1), \dots, A(n), \dots\}$ beweisbar ist. Dieser Sachverhalt ist jedoch zu unterscheiden von der Beweisbarkeit des Satzes "Für alle natürlichen Zahlen n gilt A von n". $\vdash \bigwedge_n A(n)$ (n objektsprachlich)

Es kann nun in einer formalen Theorie T durchaus möglich sein, daß für jede natürliche Zahl n der Satz "A von n" beweisbar ist, also das Satzschema, daß aber trotzdem auch der Satz "Es gibt eine natürliche Zahl, für die die Eigenschaft Non-A gilt" beweisbar ist.

$$\vdash A(0), A(1), \dots, A(n), \dots \quad \& \quad \vdash \bigvee_n \neg A(n)$$

anders ausgedrückt

$$[\forall n: \vdash A(n)] \& \vdash \neg \bigwedge_n A(n)$$

Wenn dies der Fall ist, sprechen wir von einer Omega-Inkonsistenz.

$$\sim \omega\text{-Cst}(T) \iff \forall n: \vdash_T A(n) \& \vdash_T \bigvee_n \neg A(n)$$

(das Punctum subscriptum drückt die Metasprachlichkeit des "n" aus)

Positiv definieren wir also: Eine Theorie

ist genau dann omega-konsistent, wenn es kein Prädikat A gibt, sodaß in der Theorie T sowohl für jede natürliche Zahl n der Satz "A(n)" beweisbar ist, als auch der Satz "Es gibt ein n, sodaß $\neg A(n)$ gilt" herleitbar ist.

$$\omega\text{-Cst}(T) \iff \nexists \text{Präd } A: [\forall n \vdash_T A(n) \& \vdash_T \bigvee_n \neg A(n)]$$

Für die Formal-Mathematik ist diese Omega-Inkonsistenz irrelevant.

Wichtig ist nur, daß die Theorie konsistent ist, und dies kann trotz der Omega-Inkonsistenz durchaus möglich sein.

Normalerweise ist eine Theorie inkonsistent, wenn aus ihr ein Satz A ableitbar ist und zugleich sein Gegenteil Non-A ableitbar ist.

$$\text{Cst}(T) \iff \nexists \text{Präd } A: [\vdash_T A \& \vdash_T \neg A], \text{ kurz: } \text{Cst } T \iff \nvdash_T A, \neg A$$

In der Quantorenlogik ist das Äquivalent dazu, daß jeder Satz ableitbar ist (ex falso quodlibet).

Diese Ableitung ist ein metasprachlicher Vorgang, die abgeleitete

Formel gehört der Objektsprache an. Es ist nun z.B. einerseits möglich, daß der Satz "für alle natürlichen Zahlen n gilt A von n " $\bigwedge_n A(n)$ ableitbar ist, andererseits kann es auch möglich sein, daß dieser Satz nicht ableitbar ist, jedoch für jede natürliche Zahl der Satz " A von n " $A(n)$ ableitbar ist, d.h. es ist ein ganzes Schema von Sätzen ableitbar, nämlich das Schema $A(0), A(1), A(2) \dots A(n) \dots$. Aus der Tatsache, daß dieses Satzschema ableitbar ist, folgt nicht, daß der Satz "für alle n gilt $A(n)$ " beweisbar ist.

$$\Diamond: A(0), A(1), \dots A(n), \dots \vdash \bigwedge_n A(n)$$

Gilt in einem zahlentheoretischen System das Induktionsaxiom

"Gilt eine Eigenschaft für die Null und folgt aus der Tatsache, daß die Eigenschaft für eine natürliche Zahl n gilt, die Tatsache, daß die Eigenschaft für die natürliche Zahl $n+1$ gilt, so gilt die Eigenschaft für alle natürlichen Zahlen"

$$A(0) \wedge \bigwedge_n (A(n) \rightarrow A(n+1)) \rightarrow \bigwedge_n A(n)$$

so kann im allgemeinen aus dem Satzschema $A(0), A(1), \dots A(n), \dots$ formal der Satz "alle n $A(n)$ " $\bigwedge_n A(n)$ hergeleitet werden.

Gilt bspw. das Induktionsaxiom nicht und ist dieser Satz aus dem Satzschema $A(0), A(1), \dots A(n), \dots$ nicht herleitbar, so kann das Satzschema $A(0), A(1), \dots A(n), \dots$ mit dem Satz

"Es gibt eine natürliche Zahl, für die Non- A gilt" $\bigvee_n \neg A(n)$
- bzw. quantorenlogisch äquivalent dazu "nicht für alle n gilt $A(n)$ " $\neg \bigwedge_n A(n)$ -

verträglich sein. Es muß kein Widerspruch daraus folgar sein, welcher wäre, daß sowohl $\bigwedge_n A(n)$ als auch $\neg \bigwedge_n A(n)$ ableitbar ist. Diesen Sachverhalt nennt man omega-inkonsistenz (ω -inkonsistenz).

Selbstverständlich ist jedoch für eine brauchbare adäquate Formalisierung der inhaltlichen Mathematik eine omega-inkonsistente Theorie unbrauchbar. Denn was soll man sich unter dem Sachverhalt denken, daß für jede natürliche Zahl n ein Satz $A(n)$ beweisbar ist, aber es trotzdem auch eine natürliche Zahl geben soll, für welche der Satz A nicht gelten soll. Man denke sich etwa eine solche omega-inkonsistente Zahlentheorie als Disziplin der inhaltlichen Mathematik.

Das System NF ist omega-inkonsistent, daher kann es nicht als adäquate Formalisierung der Mathematik benutzt werden.

C) Ein Paradox im System NF

Weiters ist in NF beispielsweise der Satz beweisbar, daß die

Menge aller Einer-Mengen kleinermächtig ist als die All-Menge.

$$\{x: \forall y. x = \{y\}\} \subset \forall = \{x: x = x\}$$

Ein paradoxer Sachverhalt, da man doch jeder Menge ihre Einer-Menge zuordnen kann.

$$\begin{aligned} \forall &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \dots \Omega, \Omega \cup \{\Omega\}, \dots, \dots, \dots\} \\ J \forall &= \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots \{\Omega\}, \{\Omega \cup \{\Omega\}\}, \dots, \dots, \dots\} \end{aligned}$$

und damit eine ein-eindeutige Funktion zwischen den beiden Bereichen gegeben ist. Quine rettet sich aus diesem Dilemma, indem eben diese abbildende Funktion aufgrund des Stratifikationsschemas keine Menge ist, und man deshalb die Antinomie von Cantor nicht herleiten kann. So ist dieser Sachverhalt zwar paradox, jedoch nicht widerspruchsvoll, zum Unterschied von ZF, wo das Bild einer Menge immer eine Menge ist, auch wenn die abbildende Funktion eine Proper-Klasse ist.

Aus dieser kurzen Replikation sehen wir, daß das System New Foundation für die formale Mathematik interessant ist, weil es insbesondere durch seinen mechanistischen Charakter, welcher dadurch entstand, daß wir die geschichteten Formeln aus der Russell'schen Typentheorie herleiteten, naheliegenderweise widerspruchsfrei ist. Für die inhaltliche Mathematik ist es jedoch unbrauchbar und philosophisch irrelevant, da die darin erzeugten Mengen keineswegs in einer natürlichen Weise gebildet wurden, sondern eben durch die willkürliche Festsetzung, daß die mengenkomprimierenden Eigenschaften geschichtet werden.

Teil B

Wir wollen daher versuchen, ähnliche Systeme wie NF zu finden, welche zwar die Vorteile von NF besitzen, nämlich die Existenz der All-Menge und gewisser Ultimal-Klassen als Mengen und die Abgeschlossenheit bezüglich der Boole'schen Operationen, welche jedoch mit dem Auswahl-Axiom verträglich sind und womöglich keine paradoxen Sachverhalte implizieren. Zu diesem Zweck wollen wir die ZF-Mengenlehre auf eine einfache Art und Weise einschränken zu einem zur ZF-Mengenlehre semieduktions-äquivalenten System ZF'', einem System, in dem genau die Existenz der geschlossenen Terme ableitbar ist, deren Existenz bereits in ZF ableitbar ist. Und auf die geschlossenen Terme kommt es uns ja an, denn diese werden ja interpretiert.

IV. DIE ANTI-MENGENLEHRE ANT

1. Axiome

Parallel zu diesem eingeschränkten System ZF' bilden wir die Anti-Mengenlehre ANT. Das sind jene Sätze, welche wir erhalten, indem wir das Primitiv-Prädikat " $\in$ " an allen Stellen seines Vorkommens in expandierter Form durch sein Negat Non-Epsilon " $\notin$ " ersetzen, und umgekehrt " $\notin$ " durch " $\in$ ".

Wir beginnen also mit den Axiomen und bilden überall den Kontradual-Satz dazu, welchen wir mit (*) kennzeichnen: Der Kontradual-Satz zur Nullmengenexistenz "Es gibt ein Objekt x, welches kein Ding enthält"

$$(\exists \emptyset) \forall x. x \notin \emptyset.$$

ist der Allmengen-Existenzsatz

"Es gibt ein Objekt x, welches alle Dinge enthält"

$$(*) (\exists \omega) \forall x. x \in \omega. \quad (*)$$

Das Supplement des PaarMengensatzes

"Es gibt ein Objekt x, welches genau a oder b als Element hat"

$$(\exists \{a, b\}) \forall x. (x \in \{a, b\} \leftrightarrow x = a \vee x = b).$$

ist der Ausschluß-Mengen-Satz

"Es existiert ein x, welches alle Dinge außer a und b enthält"

$$(*) (\exists \{x \mid x \neq a \wedge x \neq b\}) \forall x. (x \in \{x \mid x \neq a \wedge x \neq b\} \leftrightarrow x \neq a \wedge x \neq b). \quad (*)$$

Analog zum Verschmelzungs-Mengen-Satz (Vereinigungsmengen-Satz)

"Es ex. x, welches alle Elemente eines Elementes von a enthält, und nur diese."

$$(\exists \Sigma) \forall x. (x \in \Sigma \leftrightarrow \forall y. y \in x \rightarrow y \in \Sigma).$$

erhalten wir den Satz vom Komplements-Durchstoß (Komplements-Durchschnitt) "Es ex. x, welches genau die Elemente aller Nicht-Elemente von a enthält"

$$(*) (\exists \Delta) \forall x. (x \in \Delta \leftrightarrow \forall y. y \notin x \rightarrow y \in \Delta). \text{ oder } \forall x. (x \in \Delta \leftrightarrow \forall y. (y \in \Delta \rightarrow y \in x)). \quad (*)$$

Dem auf fundierte Basismengen eingeschränkten Aussonderungssatz (ausgesonderte-Teilmenen-Satz) "Es ex. x, welches genau die Elemente von b^F enthält, die die Eigenschaft A haben"

$$(\exists \in \Delta) \forall x. (x \in \Delta \leftrightarrow x \in b^F \wedge A x).$$

entspricht der auf gegenfundierte

Basismengen eingeschränkte Einziehungssatz ((her)angezo-gene-Umfassungsmengen-S.)

"Es ex. x, welches genau die Elemente von b^G enthält, oder solche Dinge, die die Eigenschaft A besitzen"

$$(*) (\exists \exists \alpha) \forall x. (x \in \alpha \leftrightarrow x \in b^G \wedge A x). \quad (*)$$

Weiters gilt der Potenzmengensatz

"Es ex. x, welches genau alle Teilmengen von a enthält"

$$(\exists P) \forall x. (x \in P \leftrightarrow x \subseteq a).$$

und der dazu kontraduale Richard-Mengen-Satz

"Es ex. x, das genau alle Nicht-Überdeckungen von a enthält"

$$(*) (\exists R) \forall x. (x \in R \leftrightarrow x \not\subseteq a). \quad (*)$$

mit der Richard'schen Antinomie als Memoregel, welche mit Hilfe der "Menge aller Mengen, die durch nicht mehr als 100 Worte definierbar sind", erzeugt wird.

Es sei hier darauf hingewiesen, daß die Potenzmenge von a nur jene Teilklassen von a enthält, die Mengen sind, und Teilmengen werden in der ZF-Mengenlehre nur durch das Aussonderungs-Schema, bzw. Ersetzungs-Schema erzeugt.

Werden daher bei den wgf. Formen dieser Schemata Einschränkungen gemacht, so sind nicht alle Teilklassen einer Menge Elemente ihrer Potenzmenge.

Das ZF-Ersetzungsaxiom lautet: "Es ex. x, welches genau alle Ersetzungen y einer funktionalen wg. Form F als Element enthält, deren Primärstelle z Elemente einer vorgegebenen Menge a sind".

$$(\exists \Psi) \forall x. (x \in \Psi \leftrightarrow \forall y. (y \in x \leftrightarrow \exists z. (z \in a \wedge F(x, y, z)))).$$

Eine wg. Form F hat die Funktional-Eigenschaft, wenn jeder Primärstelle genau eine Sekundärstelle entspricht. D.h. wenn aus $F(x, y)$ und $F(x, z)$ folgt, daß $y = z$ ist.

$$\vdash \text{kt}(F) \rightarrow \forall x. \forall y. \forall z. (F(x, y) \wedge F(x, z) \rightarrow y = z).$$

In der restringierten Zermelo-Mengenlehre ZF' wird dieses Ersetzungs-Axiom auf einen fundierten Vorbereich a^F beschränkt.

$$\forall x. \forall y. (x \in y \leftrightarrow \exists z. (z \in a^F \wedge F(x, y, z))).$$

Da die Funktionaleigenschaft einer wohlgeformten Form F durch Supplementierung (Kontradualisierung) erhalten bleibt, lautet das eingeschränkte Anti-Ersetzungsaxiom "es gibt ein x, welches genau alle y enthält, die nicht Ersetzungen einer funktionalen wg. Form F sind, deren Primärstelle z Elemente des Komplements einer vorgegebenen Menge a^G sind".

$$(*) (\exists \Phi) \forall x. (x \in \Phi \leftrightarrow \neg \exists y. (y \in a^G \wedge F(x, y))). \quad (*)$$

Ersetzungs-Axiom ist das ihm entsprechende klassentheoretische Bildmengen-Axiom, bei dem nun der Vorbereich ebenfalls auf fundierte Mengen eingeschränkt werden muß.

"Das Bild einer fundierten Menge a^F unter einer Funktion H ist selbst eine Menge"

$$M_g(\varphi \cup a^F)$$

oder ausführlicher "ist A^F eine fundierte Menge und H eine Funktion mit dem Vorbereich A^F und dem Nachbereich B , so ist auch B eine Menge"

$$(\exists B) M_g(A^F \cap \{f: A^F \rightarrow B\}) \rightarrow M_g B$$

Wegen der technischen Kompliziertheit des Ersetzungs-Axioms formulieren wir den Kontradual-Satz des eingeschränkten Bildmengen-Axioms "Das Anti-Bild einer gegenfundierten Menge A^G unter einer Anti-Funktion H ist selbst eine Anti-Menge." oder "ist A^G eine gegenfundierte Anti-Menge und H eine Anti-Funktion mit dem Vorbereichs-Komplement A^G und dem Nachbereichs-Komplement B , so ist auch B eine Anti-Menge."

$$(*) (\exists A B) A \cap A^G \cap \{x: x^G \rightarrow B\} \rightarrow A \cap B$$

(*)

Der Kontradualsatz zur Existenz einer unendlichen Menge "Es ex. x , welches die Null und mit jedem Element auch seinen Nachfolger enthält"

$$(\exists \infty) \forall x. (\emptyset \in x \wedge \forall y: y \in x \rightarrow y' \in x)$$

wobei Nachfolger $y' = y \cup \{y\}$

lautet "Es ex. x , welches weder die Allmenge noch den Vorläufer eines seiner Nichtelemente enthält".

$$(*) (\exists \square) \forall x \forall y. (x \neq y \wedge x \not\subseteq y \rightarrow x \not\subseteq y^G)$$

(*)

wobei Vorläufer $x^G \subseteq y - \{y\}$

Da wir jedoch zum Beweis der Transfiniten Induktion

"Wenn daraus, daß alle Vorgänger y einer Ordnungszahl x eine bestimmte Eigenschaft E haben, folgt, daß auch x diese Eigenschaft E hat, dann haben alle Ordnungszahlen diese Eigenschaft."

und der transfiniten Rekursion die Existenz einer fundierten unendlichen Menge benötigen

$$(\exists \infty \text{ fund}) \forall x. \text{Fund } x \wedge \emptyset \in x \wedge \forall y: y \in x \rightarrow y' \in x$$

(zum Beweis der transfiniten Anti-Induktion die Existenz einer gegenfundierten supplementär-unendlichen Menge benötigen)

$$(*) (\exists \sqcup \text{ Gend}) \forall x. \text{Gend } x \wedge \forall y. y \in x \rightarrow y^G \in x$$

(*)

verwenden wir in ZF' das Omega-Existenzaxiom "es gibt ein x , welches genau die ~~xx~~ (dedekind-)endlichen Ordinalzahlen enthält" $(\exists \Omega) \forall y. (y \in \Omega \leftrightarrow \neg \exists z. z \in y \wedge z \sim y)$.

Supplementär dazu, erhalten wir das ω -Existenz-Axiom "es gibt ein x , welches die nicht-Anti-Ordnungszahlen oder die unendlichen Komplemente eines y als Elemente enthält".

$$(*) (\exists \omega) \forall y. (y \in \omega \leftrightarrow \neg \exists z. z \in y \wedge z \sim y) \vee \forall y. \exists z. z \in y \wedge z \sim y. (*)$$

Der Kontradual-Satz des verschärfen Auswahl-Axioms

"Es ex. ein x , welches Element der Klasse A ist, dann und nur dann, wenn das gewählte Element εA aus A Element von A ist"

$$(\varepsilon) \forall x. x \in A \leftrightarrow \varepsilon A \in A$$

lautet "Wenn es ein x gibt, das kein Element der Klasse A ist, so ist auch das komplementsgewählte Element εA aus A kein Element von A "

$$(*) (\varepsilon) \forall x. x \notin A \rightarrow \varepsilon A \notin A (*)$$

Das Extensionalitätsaxiom "Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben"

$$(*) (E) a = b \leftrightarrow \forall y. (y \in a \leftrightarrow y \in b). (*)$$

geht durch Kontradualisierung in sich selbst über.

2.) Die Anti-Theorie ANT ist das Spiegelbild der ZF-Mengenlehre.

Pro-Mengenlehre		Anti-Mengenlehre	
Objekt-Konstanten:			
Null-Menge	$\emptyset$	All-Menge	$\forall$
Nat.-Zahlen-Menge	Ω	Anti-Zahlen-Menge	ω
.....			
Objekt-Funktoen:			
Einer-Menge	$\{a\}$	Einer-Ausschluß	$\neg a$
Paar-Menge	$\{a, b\}$	Ausschluß	$\neg a, b$
Verschmelzung	$\sum a$	Komplements-Durchstoß	$\Delta^G a$
Aussonderung	$A \cap b^F$	Einziehung	$A \cup b^G$
Potenz-Menge	$P a$	Richard-Menge	$R a$
Ersetzung (Bild)	$B_A b^F$	Anti-Ersetzung (Anti-Bild)	$\neg B_A^G b^G$
.....			
Prädikate:			
Elementschaft	" $\in$ "	Nicht-Elementschaft	" $\notin$ "
Gleichheit	" $=$ "	Gleichheit	" $=$ "
Inklusion	" $\subseteq$ "	Umfassung	" $\supseteq$ "
Fundiertheit	"fund"	Gegen-Fundiertheit	"Gend."
.....			
Operatoren:			
Klassen-Operator	$\neg x: A(\neg)$	Anti-Klassen-Operator	$\neg x: A(x)$
Mengen-Operator	$\neg x: A(x)$	Anti-Operator	$\neg x: A(\neg)$

2.) Proto - Anti - Zuordnung

1. Axiome

SYNTHO - MENGENLEHRE

100.100

$(\exists \emptyset) \bigvee_x \bigwedge_y . y \notin x.$	Nullmenge
$(\exists v) \bigvee_x \bigwedge_y . y \in x.$	Allmenge
$(\exists I) \bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow y = a \vee y = b.$	Paarmenge
$(\exists \overline{I}) \bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow y \neq a \wedge y \neq b.$	Ausschluß
$(\exists \Sigma) \bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow \bigvee_z : y \in z \wedge z \in a :.$	Verschmelzung
$(\exists \Delta) \bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow \bigwedge_z : z \in a \rightarrow y \in z :.$	Kompl.-Durchstoß
$(\exists \subseteq) \bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow y \in a^F \wedge B(y).$	Aussonderung
$(\exists \supset) \bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow y \in a^G \vee B(y).$	Einziehung
$(\exists P) \bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow y \subseteq a.$	potenzmenge
$(\exists R) \bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow y \not\subseteq a.$	Richardmenge
$(\exists H) \bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow \bigvee_z : \delta H(z, y) \wedge z \in a^F :.$	Ersetzung
$(\exists \neg H) \bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow \neg \bigvee_z : \delta H(z, y) \wedge z \in a^G :.$	Anti-Ersetzung
$(\exists \Omega) \bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow \exists z y \wedge \neg \bigvee_z : z \cong y :.$	Omega
$(\exists w) \bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow \neg \exists z \bar{y} \vee \bigvee_z : z \cong y :.$	w-Menge
$(\exists) \bigvee_x . x \in a. \rightarrow \exists q \in a$	Auswahl
$(\exists) \bigvee_x . x \in a. \rightarrow \exists q \in a'$	Kontra-Wahl
$(E), (A \equiv E) a = b \leftrightarrow \bigwedge_y . y \in a \leftrightarrow y \in b.$	Extensionalität

100.101

2. Der Fundierung-Funktor "F"

Durch die Änderung der Buchstaben erhalten wir also aus der Pro-Anti-Mengenlehre ein völlig anderes System, nämlich die Syntho-Mengenlehre SY, ein viel stärkeres System, weil durch die iterierte Proto-Anti-Funktor-Anwendung mehr Objekte als im PROANT erzeugt werden können. Im Unterschied zum vorigen System PROANT ist es daher hier noch sehr fraglich, ob SY widerspruchsfrei ist. Wir wissen ja, daß, wenn wir beispielsweise die All-Menge $\forall$ für a im Aussonderungs-Axiom

$$\bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow y \in a \wedge B(y).$$

einsetzen:

$$\bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow y \in \forall \wedge B(y).$$

Wir den Teil $y \in \forall$ abklammern können, da ja jede Menge ein Element der All-menge ist, und so das Aussonderungs-Axiom in das Frege-Schema übergeht.

$$\bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow B(y).$$

Das Frege-Schema ist jedoch inkonsistent, da damit die Russell-Menge erzeugt werden kann.

$$\bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow y \notin y. \vdash \perp.$$

Wir sehen aber, daß bei uns im System SY dies nicht möglich ist, da wir in der Pro-Theorie ZF' ihrem Aussonderungs-Axiom

$$\bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow y \in a^F \wedge B(y).$$

die Basis-Menge a auf fundierte Mengen beschränkt haben (durch den hochgestellten Fundierungs-Funktor).

Analoges gilt für das

Teilmengen-Axiom $M_g X^F \wedge X^F \supseteq Y \rightarrow M_g Y$
 Ersetzungs-Axiom $Fk + H \rightarrow \bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow \bigvee_z : z \in a^F \wedge H(z, y) :.$

und das Bildmengen-Ax. $M_g X^F \wedge (H : X^F \rightarrow Y) \rightarrow M_g Y$,
 wo wir den Vorbereitungsbereich auf fundierte Mengen beschränkt haben.
 Setzen wir in diesem restringierten Aussonderungs-Axiom (oder dem Teilmengen-Axiom) die All-Menge $\forall$ als Basis-Menge ein

$$\bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow y \in \forall^F \wedge B(y).$$

$$(M_g \forall^F \wedge \forall^F \supseteq Y \rightarrow M_g Y),$$

so wird sie eliminiert, da sie nicht fundiert ist, und es tritt die Leere-Menge an ihre Stelle.

$$\bigvee_x \bigwedge_y . y \in x \leftrightarrow y \in \emptyset^F \wedge B(y).$$

$$(M_g \emptyset^F \wedge \emptyset^F \supseteq Y \rightarrow M_g Y)$$

Aus der Allmenge kann man also keine Mengen aussondern, und generell, aus irgend einem Anti kann keine Menge ausgesondert werden, da ja die Antis nicht fundiert sind. Ich kann nur aus den Zermelo-Mengen aussondern, beziehungsweise von ihnen Bilder erzeugen. Umgekehrt kann ich nur in die Antis andere Antis einziehen und Anti-Bilder produzieren.

Das Handikap, daß das Aussonderungsaxiom durch Einsetzen der Allmenge in das Frege-Schema übergeht, haben wir beseitigt durch den Trick mit dem Formel-Isomorphismus, indem wir parallel zur Zermelo-Fraenkel'schen Mengenlehre und der Konstruktion der Mengen von unten, die Anti-Mengenlehre mit der Konstruktion der Mengen von oben her, gebildet haben, und eben nur für Protos das Aussonderungs-Axiom zulassen. Es bleibt aber weiter die Frage offen, was passiert, wenn man andere Proto-Funktoren von Anti-Mengen bildet, etwa die Potenzmenge von einem Anti.

Nun haben wir schon gehört, daß etwa die Potenzmenge der Allmenge wieder die Allmenge ist. Was ist mit der Potenzmenge der Allmenge ohne der Null? $P(V - \{\emptyset\})$?

Die Klasse aller Teilmengen der Allmenge ohne der Null

$$\{x: x \subseteq V - \{\emptyset\}\}$$

ist mir ersichtlicherweise die Klasse aller Mengen, die die Null nicht enthalten. $\{x: \emptyset \notin x\}$

Wir sehen also, die Potenzmenge von einem Anti wird extensional kleiner, also weniger umfassend, als die zugrunde gelegte Menge. Es wäre daher möglich, daß die Potenzmenge so klein wird, daß sie in den antinomischen Bereich hineinragt, daß sie etwa so klein wie die Russell-Klasse wird. Aus diversen komplizierteren Überlegungen jedoch, die wir hier beiseite lassen wollen, ist ersichtlich, daß durch Potenzmengenbildung, Verschmelzungsmengenbildung, Paarmengenbildung, etc., von Antis, keine Proper-Klassen entstehen.

Analoges gilt umgekehrt für die Anti-Operationen von Protos. Wir können also ohne weiteres die beiden Systeme: ZF'' (als PRO) und ANT, mit lateinischen Buchstaben geschrieben, zusammenfügen zur Syntho-Mengenlehre SY, welche zur Zermelo-Fraenkel'schen Mengenlehre ZF relativ konsistent ist. Ein diesbezüglicher rela-

3, Komplements-Existenz " $(\exists \neg)$ "

tiwer Widerspruchsfreiheitsbeweis, der komplizierte Modellkonstruktionen beinhaltet, kann skizziert werden, indem aus den Mengen eines angenommenen natürlichen ZF-Modells in einem Prozeß mehrfacher Iteration die Synthos konstruiert werden, und so aus dem ZF-Modell ein Modell für SY konstruiert wird. Diese Syntho-Mengenlehre besitzt wie das Quine'sche System NF mit dem Universum umfanggleiche Ultimal-Mengen, und ist abgeschlossen gegenüber den Boole'schen Operationen. Es kann ein Komplement-Existenz-Theorem bewiesen werden, nämlich, daß zu jeder Menge m auch ihr Komplement $\bar{m}$ als Menge existiert. Im Gegensatz zu NF enthält es jedoch das Auswahl-Axiom, und da es die Zermelo-Fraenkel'sche natürliche Zahlenklasse enthält, ist es auch nicht omega-inkonsistent. Da das Querelement einer Abbildung einer Menge auf ihre Potenzmenge mit Hilfe des Aussonderungs-Axiomen-Schemas gebildet wird und die Allmenge im Aussonderungs-Schema nicht eingesetzt werden darf, kann also auch das Querelement der Allmenge nicht gebildet werden, und somit nicht der Sachverhalt bewiesen werden, daß die Allmenge kleinermächtig ist als ihre Potenzmenge, also kleinermächtig als sie selbst. Die Cantor'sche Antinomie ist also nicht ableitbar.

Diese Syntho-Mengenlehre kann als Axiomensystem auch folgendermaßen formuliert werden:

Da die Anti-Mengen-Existenz-Axiome genau die Existenz der Anti-Mengen von ZF-Mengen aussagen, kann SY auch charakterisiert werden als ZF'' vereinigt mit dem Supplementär-Term-Existenz-Axiom, dh. wir fügen zu ZF'' als Axiom $(\exists^S \in V)$ hinzu, daß zu jedem Term t sein Supplementär-Term t^S existieren soll. Das ist derjenige Term, in dessen expandierter Darstellung das Epsilon überall durch sein Negat " $\notin$ " und der Klassen-Operator $\{ \dots \}$ überall durch das Komplement vom Klassen-Operator $\{ \dots \}^S$ ersetzt wird.

Der Supplementär-Term der Null ist z.B. die Allmenge, der Supplementär-Term der Einer-Klasse ist der Ausschluß, usw., und immer ist der Supplementär-Term eines Protos, nämlich das ihm entsprechende Anti, von größerer Mächtigkeit als das Proto selbst.

$$Pro(x) \rightarrow x \subset x^S$$

Und umgekehrt ist der Supplementär-Term eines Antis, nämlich das ihm entsprechende Proto, von kleinerer Mächtigkeit als das Anti selbst.

$$Ant(x) \rightarrow x \supset x^S$$

Wir haben gesehen, daß bei der Syntho-Mengenlehre von unten herauf die Proto-Mengen und von oben hinunter die Anti-Mengen konstruiert werden, so daß jedem Proto ein Anti als Supplementär-Term entspricht und umgekehrt. In der Mitte liegen die Proper-Klassen. Diese Eigenschaft der meisten Syntho-Mengen (Synthos), daß sie nicht gleichmächtig mit ihrem Supplement sind, können wir auch zum Aufbau eines Systems benutzen.

VII. ELEMENTAR-MENGENLEHRE EL 1. Nicht-Komplements-Äquivalenzheit " $X \sim X^c$ "

Da das Supplement einer Menge im allgemeinen gleichmächtig ist mit dem Komplement der Menge, sind die Synthos ^(a) auch verschiedenmächtig von ihrem Komplement.

$$X \sim X^S \wedge X^S \sim X^c \rightarrow X \sim X^c$$

Diese Überlegungen legen die Konstitution einer elementaren Mengenlehre ^{EL} nahe, in der " $X \sim X^c$ " die mengencharakterisierende Eigenschaft ist. Wenn wir dann aber die Mengen-Existenz-Axiome von SY weglassen, so ist dieses Definitions-Schema allein so schwach, daß wir daraus nicht einmal die Existenz irgendeiner Menge ableiten können. Denn woher wissen wir, daß es überhaupt eine Menge gibt, daß z.B. die Null-Klasse oder die All-Klasse eine Menge ist? Erst wenn wir wissen, daß es irgendeine Menge gibt, wissen wir auch, daß die All-Klasse mindestens ein Element besitzt und somit verschieden und verschiedenmächtig von der Null-Klasse ist, und aufgrund des eben beschriebenen Postulates eine Menge. Wir müssen uns bei der Aufstellung dieses Systems daher mit einem Trick behelfen, indem wir als mengenkonstituierende Eigenschaft nicht fordern, daß die Klassen verschiedenmächtig von ihrem Komplement seien, sondern die dazugehörigen Klassen höherer Stufe. Diese Klassen höherer Stufe sind nichts anderes als die mit der Russell'schen Typen-Theorie aus bisherigen Klassen niederer Stufe als Urelemente gebildeten neuen Entitäten, die durch den Abstraktionsprozeß, oder formal durch das Church-Schema konstituiert werden.

$$Y^n \in \{X^{n+1} : A(X^n)\} \leftrightarrow A(Y^n)$$

Diese neuen Entitäten sind um eine Stufe höher als die Urelemente, (bzw. nur von höherer Stufe, wenn Ordinalzahlen als Stufenskala zugrunde gelegt werden und die neue Entität die Stufe einer Limes-Zahl hat).

Bei der so konstruierten Elementarmengenlehre EL haben wir also die Klassenexistenz der reinen Prädikatenextensionen: Zu jedem offenen Satz (wohlgeformte Formel) $A(y)$ gibt es eine Klasse X , welche die Prädikaten-Extension der Eigenschaft $A(y)$ ist, also die Klasse aller y , welche die Eigenschaft $A(y)$ haben.

$$\forall A : \forall X. X = \{y : A(y)\}.$$

Als Mengen-Existenz-Schema formulieren wir:

"Genau die zu den nicht-komplements-äquivalenten Virtualen dazugehörigen Klassen, sind Mengen."

$$\{X : A(x)\} \sim \{X : A(x)\} \leftrightarrow M \{x : A(x)\}$$

$$\text{wobei } \{A\} \equiv \{A^{(a_1/A_1, b_1/B_1, \dots, z_1/Z_1, A_1/A_1, B_1/B_1, \dots, z_1/Z_1)}\}$$

Die Virtualen sind hier irgendwelche passende Klassen höherer Stufe, welche folgendermaßen aufgebaut werden: parallel zum Klassen-Operator $\{X : A(x)\}$ definiere ich den Virtualen-Operator, $\{X : A(x)\}$, den ich statt durch geschweifte Klammern durch einen doppelten Abstraktionsstrich kennzeichne. Hierbei gehen die kleinen lateinischen Buchstaben in große über, also die Mengenvariablen in Klassenvariablen, und die großen lateinischen Druckschriftbuchstaben in große lateinische Schreibschriftbuchstaben über, also die Klassenvariablen in Virtualenvariable (Klassenvariable höherer Stufe). Und zwar erfolgt das Ganze bei den wohlgeformten Formen in expandierter Form. Darauf ergibt sich, daß in nicht-expandierter Schreibweise der Klassen-Operator jedesmal in den Virtualen-Operator übergeht.

$$\{A\} \equiv \{A^{(x/x, X/X, \{B\}/\{B\})}\}$$

Dieser Virtual-Operator und die Klassen höherer Stufe brauchen wir hier nur als Hilfswerkzeug, sie tragen zum System EL eigentlich nichts bei. Wir müssen nur zu diesem Trick greifen, weil wir nicht einmal die Existenz einer Menge beweisen können, wenn wir das Postulat der Nicht-Komplements-Äquivalenzheit nur für Klassen fordern, wie wir vorher gesagt haben. Mit diesem Trick können wir jedoch ein sehr starkes System aufbauen.

daher auch eine Unmenge der Elementar-Mengenlehre EL. Weiters sollen noch andere Klassen, welche ähnlich wie $\mathbb{J}$ gebaut sind, Mengen des Octal-Mengenlehre-Systems OC sein:

$$\mathbb{I} = \{ \langle x, x \rangle : x = x \} \quad (\text{Identität})$$

$$\mathbb{J}^n = \{ \langle x, [^n x] \rangle : x = x \} \quad (n\text{-Supratät})$$

$$\mathbb{V}^2 = \mathbb{V} \times \mathbb{V} = \{ \langle x, y \rangle : x = x \wedge y = y \} \quad (\text{Menge aller geordneten Paare})$$

1. Der Begriff "Octal"

Analog zu den Stratifikationsystemen, wo genau mit den geschichteten Formeln Mengen gebildet werden können, sollen in der Octal-Mengenlehre durch die octalen wohlgeformten Formen Mengen gebildet werden können. Heuristisch besagt der Begriff Octal "ohne zyklischen Teil", daß eine wohlgeformte Formel "ohne zyklischen Teil" ist. Damit ist folgendes gemeint: Identifiziere ich die einzelnen Individuen-Variablen-Buchstaben der betreffenden wohlgeformten Form und betrachte sie als Punkte eines (gerichteten) Graphen, fasse ich das Epsilon-Zeichen als gerichtete Kante des Graphen auf, dann soll dieser Graph keinen Ring, keinen geschlossenen Kreis, haben. Hierbei wird nicht verlangt, daß die Richtungspfeile in einem Drehsinn angeordnet sein müssen. Es darf auch kein Zyklus vorhanden sein, der sich aus mehreren gerichteten Kanten-zügen oder "Kreisteilen" zusammensetzt.

Gleiche Variablen-Buchstaben sehen wir dabei als einen einzigen Punkt des Graphen an, es sei denn, daß sie nicht durch eine Epsilon-Passage in der wohlgeformten Form verbunden sind (wie bei den klassenkomprimierenden Eigenschaften von $\mathbb{E}, \mathbb{E}_1, \mathbb{R}, \mathbb{K}^0$, sondern bloß in der subalternen Beziehung zu geordneten oder ungeordneten Paaren stehen (wie bei den mengenkomprimierenden Eigenschaften von $\mathbb{V}^2, \mathbb{I}, \mathbb{J}$).

Verschiedenen Variablen-Buchstaben sollen verschiedene Punkte entsprechen.

Beispiele:

$\mathbb{V}^2$... Klasse aller geordneten Paare

$\mathbb{R}$... Russell-Klasse

$\mathbb{E}$... Elementschaffs-Klasse

$\mathbb{E}_1$... E 1-Klasse

$\mathbb{I}$... Identität

$\mathbb{J}$... Supratät

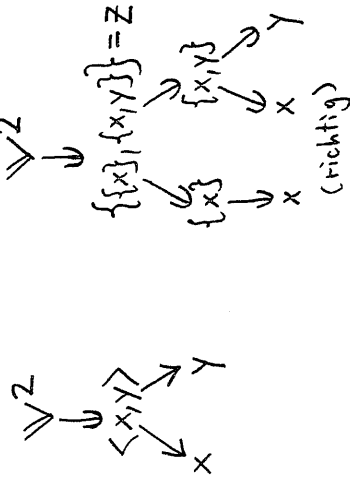
OCTAL ist im Gegensatz zum Stratifikations-System NF, welches dem mechanistischen Kalkül-Charakter angepaßt ist, Objektbereichs-orientiert. Zum Vergleich sei folgende Skizze:

NF-M ₀	NF-PrKL	OCT-M ₀	OCT-PrKL
$\mathbb{V}, \mathbb{J}^n \mathbb{V}, \mathbb{I}; \mathbb{E}_1$	$\mathbb{J}; \mathbb{E}, \mathbb{R}, \mathbb{F};$	$\mathbb{V}, \mathbb{J}^n \mathbb{V}, \mathbb{I}; \mathbb{J};$	$\mathbb{E}_1; \mathbb{E}, \mathbb{R}, \mathbb{F};$
$\vdash_{M_0} \mathbb{Q}, \mathbb{N}, [\mathbb{X}]$		$\vdash_{M_0} \mathbb{Q}, \mathbb{N}, [\mathbb{X}]$	
Strat:	$\sim \text{Strat:}$	Octal:	$\sim \text{Octal:}$
$\mathbb{Y} = \langle [\mathbb{U}], \mathbb{V} \rangle \wedge \mathbb{U} \in \mathbb{V}$	$\mathbb{Y} \in \mathbb{A} \wedge \mathbb{A} \in \mathbb{Y} [\text{afri}]$	$\mathbb{Y} \in \mathbb{A} \wedge \mathbb{A} \in \mathbb{Y} [\text{afri}]$	$\mathbb{Y} = \langle [\mathbb{U}], \mathbb{V} \rangle \wedge \mathbb{U} \in \mathbb{V}$
$\mathbb{J} = \{ \langle x, [\mathbb{X}] \rangle : \mathbb{X} \} , \mathbb{E}_1 = \{ \langle [\mathbb{X}], \mathbb{Y} \rangle : x \in \mathbb{Y} \} , \mathbb{F} = \{ \mathbb{Y} : \text{Fund } \mathbb{Y} \} .$			
$\forall x. y = \langle x, [\mathbb{X}] \rangle .$		$\forall x. y = \langle x, [\mathbb{X}] \rangle .$	

2. Beispiele

101.110

$$\forall^2 = \forall x \forall y = \{ \langle x, y \rangle : y \} = \{ z : \forall x \forall y. z = \{ \{x\}, \{x, y\} \} \}$$



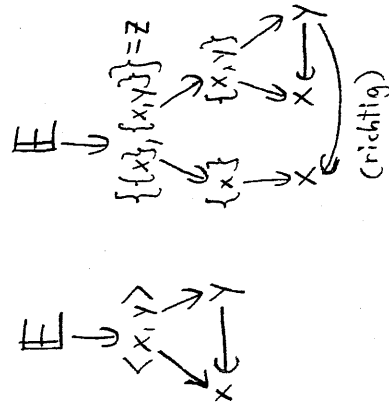
Oct
Strat

$$R = \{ x : x \notin x \} \quad K^0 = \{ x : \neg \forall y. x \in y \} = \{ x : x \notin x \}$$



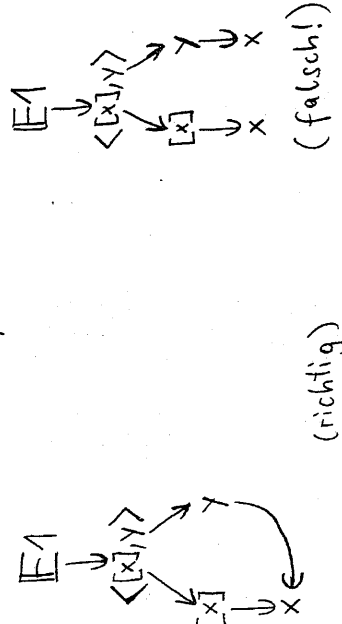
Nicht Oct
Nicht Strat

$$E = \{ \langle x, y \rangle : x \in y \} = \{ z : \forall x \forall y. z = \{ \{x\}, \{x, y\} \} \wedge x \in y \}$$



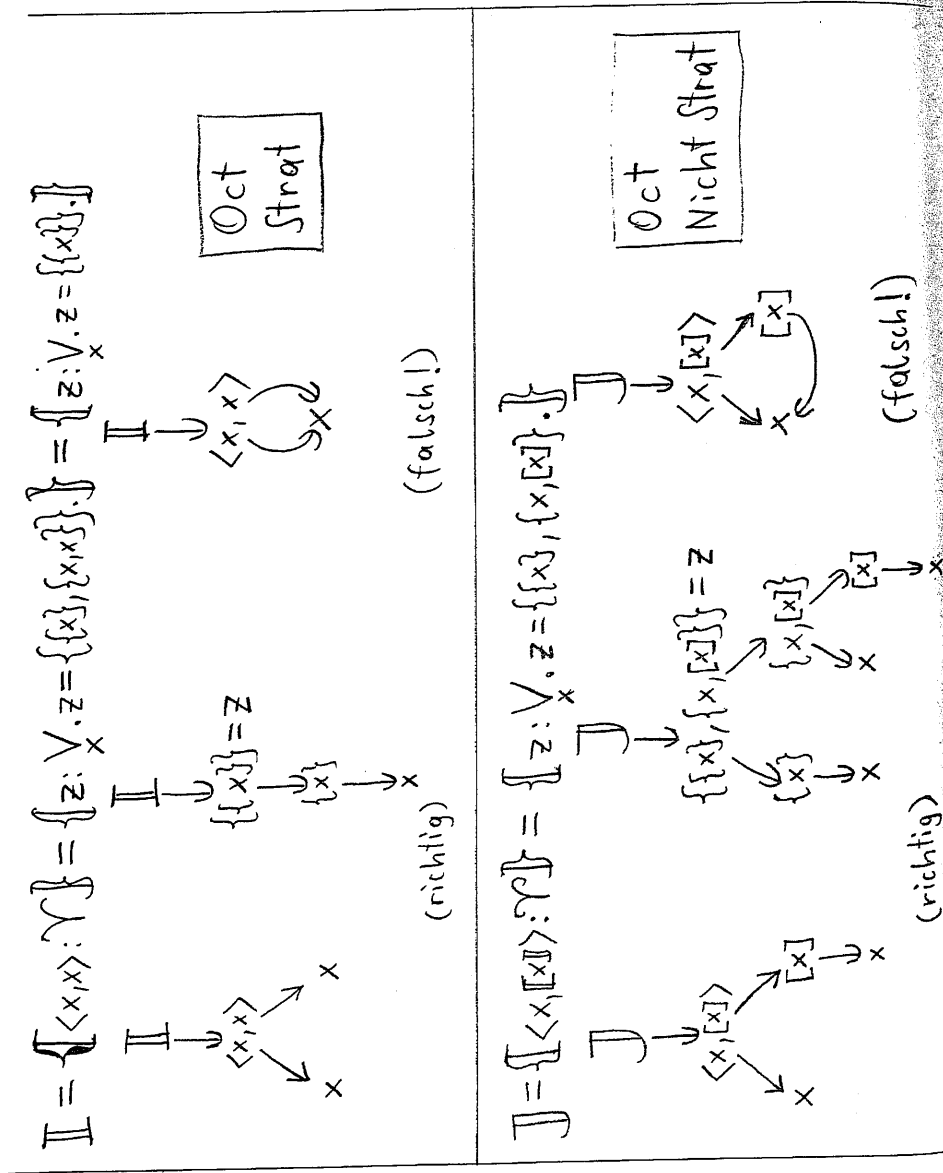
Nicht Oct
Nicht Strat

$$E1 = \{ \langle [x], y \rangle : x \in y \}$$



Nicht Oct
Strat

101.111



Wir sehen also, daß die mengen-komprimierende Eigenschaft der Elementsklasse $\mathbb{E}$ weder stratifiziert noch octal ist, die der $\mathbb{E}_1$ -Klasse $\mathbb{E}_1$ zwar stratifiziert, aber nicht octal ist, die der Supratatsklasse $\mathbb{J}$ nicht stratifiziert, aber octal und diejenige der Identität $\mathbb{I}$ sowohl stratifiziert als auch octal ist.

Der bewußt nicht endgültig festgelegte programmatische Begriff Octal intendiert eine gewisse Konvergenz gegen die naive Mengenlehre hin. Er ist der Versuch einer Formalisierung, auf gleiche natürliche Art und Weise wie in der naiven Mengenlehre, womöglich jedem offenen Satz eine Menge zuzuordnen. Zunächst durch einen Mengenerzeugungsprozeß, wo die Menge als eine reine, absolute Prädikatenextension aufgefaßt wird. Das Octal-System, wo anstelle der Stratifikationsbedingung die "Nicht-Cyklizitäts-Bedingung" tritt, ist ähnlich wie New Foundation ein wesentlich umfassenderes System als die Zermelo-Mengenlehre und ein adäquateres Explikat der naiven Mengenlehre.

IX.) DIE GLOBAL-MENGENLEHRE GLO

1.) Transskription in die Kognitiv-Sprache.

Angestrebt wird durch GLO das hypothetische Axiomensystem NM der Naiven Mengenlehre, welches wegen seiner zyklischen Definiertheit natürlich nicht de facto existiert, und wegen der Unvollständigkeit der Mengenlehre durch ein rekursiv axiomatisiertes Axiomen-System auch nicht erfaßt werden kann, was wir ja schon von dem berühmten Gödel'schen Unvollständigkeitssatz (1931) her wissen. GLO soll jedoch so umfassend wie möglich konzipiert werden.

Daher verfähre man folgendermaßen weiter: ich betrachte die Antinomie des Lügners "Alles was ich sage ist Lüge" und lehne mich an die Bedeutung des Satzes an. Dieser Satz ist nur dann antinomisch, wenn er in seiner logischen Bedeutung absolut genommen wird, nämlich wenn mit dem "alles" auch tatsächlich jeder Satz gemeint ist, also auch er selbst. Derjenige, der dieses spricht, kann logisch jedoch nur meinen, daß alles außer diesem Satz Lüge ist. In seiner Aussage ist implizit enthalten, daß er ja keine antinomische Aussage treffen möchte, sondern daß er gerade diesen Satz von der generellen Falschheit aller Sätze ausschließen möchte. Will er jedoch eine antinomische Aussage treffen, so formuliert er einen Unsinn, er trifft eine logischerweise falsche Aussage. Das natürliche Sprechen und die entsprechenden formalisierten Sätze müssen adäquat so formuliert werden, daß sie

den "Gedanken des Satzes" widerspiegeln. Sie dürfen daher im Fall der Antinomie nicht als absolute All-Aussagen aufgefaßt und formuliert werden.

Der Satz "Alles was ich sage ist Lüge" kann logisch sinnvoll nur bedeuten (bedeutet also in Wirklichkeit) "Alles was ich sage, außer diesem Satz, ist Lüge". Bei der Formalisierung des umgangssprachlichen Satzes muß also vorerst eine Transkription in die Kognitiv-Sprache durchgeführt werden. Denn Antinomien sind Eigenschaften der natürlichen Sprachen. Formale Sprachen treffen Einschränkungen, um diese Antinomien zu beseitigen. Eine solche Einschränkung ist die Transskription in die Kognitiv-Sprache des "Ideal Denkens", welches zyklisch definiert ist als "das Denken, welches nicht irrt". Behaupte ich nämlich, daß das Ideal Denken irrtbar ist, kann dieser Sachverhalt nicht absolut wahr sein, denn dann wäre es möglich, daß diese Behauptung selbst schon falsch ist. Klarerweise kann jeder irren, wenn er ein Problem bedenkt. Aber das Ideal Denken ist die logische Struktur selbst (die den Irrtum zu entdecken ermöglicht). Es gibt jedoch kein Rezept, keinen Algorithmus für die Transskription in die "Kognitiv-Sprache", was ein verbaler umgangssprachlicher Satz kognitiv sinnvoll zu bedeuten hätte. Es gibt mehrere Möglichkeiten der Bedeutung, noch mehrere Möglichkeiten der Formalisierung. Wenn nach der Transskription noch Widersprüche auftreten und richtig formalisiert wurde, dann ist der Sinn des Satzes nicht richtig transkribiert worden.

Wende ich dieses Konzept auf den Mengenbildungsprozeß an, so erhalte ich z.B. als relative Russell-Menge die "Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, außer ihr selbst."

In der mengenkomprimierenden Eigenschaft des Frege-Schemas $\forall y. y \in x \leftrightarrow Ay$ kommt mir dann die Variable^x des Objektes, dessen Existenz ausgesagt wird, vor. Ein solches Frege-Schema wollen wir ein außerordentliches nennen.

$$\forall y. y \in x \leftrightarrow A(y, \underline{x}). \text{ oder } \forall y. y \in x \leftrightarrow A^{(x)}(y) \wedge B(\underline{x}).$$

Durch Anwendung dieses Konzeptes kann die Russell-Klasse $\mathbb{R}$ als Menge^f aufgefaßt werden, und genauso verhält es sich bei der Ordinalzahlen-Klasse $\mathbb{N}$, sie läßt sich als "Menge aller Ordinalzahlen, außer ihr selbst" $\mathbb{N}^f$ bilden. Ebenso

kann eine relativierte Allmenge $\forall^1$ als "Menge aller Mengen, außer ihr selbst" gebildet werden. In diesem Fall ist nicht beweisbar, daß diese relative Allmenge ihr eigenes Querelement enthält, da bei der Bildung des Querelementes ja erst gezeigt werden muß, daß dieses Querelement ungleich der Allmenge ist.

Nimmt man jedoch kompliziertere mengenbildende Eigenschaften, wie beispielsweise die Fundiertheit, so muß man zu wesentlich drastischeren Einschränkungen greifen, um hier z.B. die Antinomie von Mirimanoff zu verhindern.

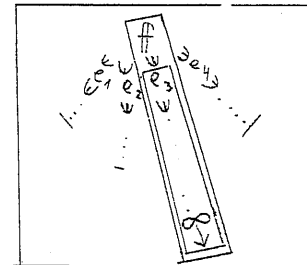
2. Die Mirimanoff-Antinomie besagt, daß die "Menge aller Mengen, die keine unendliche absteigende Elementfolge besitzen", wenn sie existiert, einen Widerspruch erzeugt. Eine Menge hat (k)eine unendliche absteigende Elementfolge, wenn es (k)eine Funktion gibt, die als Vorbereich die natürlichen Zahlen^N und als Nachbereich irgendwelcher Mengen m_i hat. Wir nennen eine solche Menge, die keine unendliche absteigende Elementfolge hat, eine ordentliche Menge. Eine Menge mit einer unendlichen absteigenden Elementfolge nennen wir eine außerordentliche Menge. ~~alle~~ Es sei nun $\mathbb{M}$ die Mirimanoff-Menge, also die "Menge aller ordentlichen Mengen."

$$\mathbb{M} = \{x : \text{Ordentlich}(x)\}$$

Diese Mirimanoff-Menge $\mathbb{M}$ ist selbst ordentlich, dh. sie enthält keine unendliche absteigende Elementfolge.

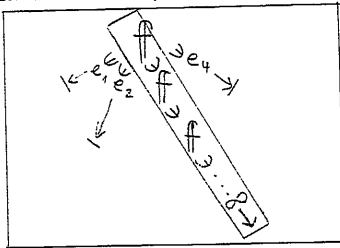
Wäre sie nämlich außerordentlich, dh. sie enthielte eine unendliche absteigende Elementfolge, dann gäbe es mindestens ein Element von ihr, welches eine unendliche absteigende Elementfolge besitzt, es gäbe also (mindestens) ein außerordentliches Element.

z.B.



Die Mirimanoff-Menge wäre also nicht die Menge aller ordentlichen Mengen, als welche wir sie definiert haben.

Aus dieser indirekten Überlegung ersehen wir also, daß die Mirimanoff-Menge selbst auch ordentlich sein muß. Da sie aber die Menge aller ordentlichen Mengen ist, muß sie sich auch selbst als Element enthalten, $\mathfrak{f} \in \mathfrak{f}$, da sie ja, wie wir eben gesehen haben, ordentlich ist. Wenn sie sich selbst jedoch als Element enthält, enthält sie auch eine unendliche absteigende Elementfolge, nämlich diejenige, wo immer wieder sie selbst als ihr eigenes Element auftritt. (Das ist ähnlich wie das Henne-Ei-Verhältnis, welches ad infinitum fortgesetzt werden kann).



Sie enthält also eine außerordentliche Menge in Widerspruch zu der Festlegung, daß sie die Menge aller ordentlichen Mengen ist.

Aus einer analogen Überlegung sehen wir, daß die "Gesamtheit aller Objekte, welche eine unendliche Elementfolge haben", auch dann nicht zu einer Menge komprimiert werden kann, wenn wir die absolute Prädikaten-Extension durch den Zusatz "außer ihr selbst" einschränken.

Denn in diesem Falle können wir auch zeigen, daß eine solcherart eingeschränkte Menge ebenfalls einen Widerspruch erzeugt. Wir müssen schon zu der wesentlich drastischeren Einschränkung greifen, daß sie "nur diejenigen ordentlichen Elemente enthält, deren transfinite Hülle kleinermächtig ist als die solcherart eingeschränkte Mirimanoff-Menge selbst."

Bisher wurden allerdings nur einige Mengen aufgezählt, welche wir auf Grund von Restriktionen der mengenbildenden Eigenschaft antinomischer Mengenbegriffe erhalten haben: Die Russell-Menge $\mathfrak{r}$, die Ordinal-Zahlen-Menge $\mathfrak{o}$, die Mirimanoff-Menge $\mathfrak{f}$ usw. Wie verhält es sich allerdings mit den anderen wohlgeformten Formen bzw. Eigenschaften, mit welchen wir eine Menge bilden wollen? Nun, analog zum ordentlichen Frege-Schema, in welches nur

3, Systemen-System

solche Formeln A eingesetzt werden dürfen, die die Octal-Bedingung erfüllen, bilden wir eine Reihe eingeschränkter Frege-Schemata, bei welcher zu jeder Formelbedingung $A^{(x)}(y)$, wo das x nicht vorkommt, eine einschränkende Zusatzbedingung $B(x, y)$ tritt.

So kommt also zu allen Formeln, welche beispielsweise die Jimmen-Bedingung $\text{Jim}(A)$ erfüllen, die Zusatzbedingung "außer ihr selbst" $\lambda y \neq x$ hinzu.

Wir wollen die formalen Systeme möglichst "dicht" an das hypothetische Axiomen-System der naiven Mengenlehre heran schieben, derart, daß womöglich zu jedem offenen Satz eine Menge existiert, was eine adäquatere Explikation des naiven Mengenbegriffes darstellt. Wir erreichen dies durch Angabe einer "möglichst weiten" Formelbedingung für die wg.f. $\mathcal{U}$ (mengen-erzeugenden Formen) in der absoluten Postulation der Mengenexistenz, zusammen mit einer Reihe von absolutheits-einschränkenden [oder absolutheits-erweiternden] Zusatz-Bedingungen $\mathcal{L}$ bei der relativen Postulation und den dazugehörigen Formelbedingungen $\mathcal{U}$: $\forall y. y \in x \leftrightarrow \mathcal{U}^{(x)} y \wedge \mathcal{L} y x$.

erzeugte Objekte	Absolutheits-einschränkende Zusatz-Bedingung	Formel-Bedingung
Synthes	"Z-Frm 0"($\mathcal{L}$): $\mathcal{L} \equiv \lambda$	"F-Bedg 0"($\mathcal{U}$): Octal($\mathcal{U}$)
Jimmen	"Z-Frm 1"($\mathcal{L}$): $\mathcal{L} \equiv \lambda y \neq x$	"F-Bedg 1"($\mathcal{U}$): Jim($\mathcal{U}$)
Inklusionen	$\mathcal{L} \equiv \lambda y \neq \Box$	$\mathcal{U}$ beliebig
Funden	$\mathcal{L} \equiv \lambda y < \Box$	$\mathcal{U}$ beliebig
Absolutheits-erweiternde Z.Bedg.		
Quinen	"Z-Frm μ "($\mathcal{L}$): $\mathcal{L} \equiv \lambda$	"F-Bedg μ "($\mathcal{U}$): Octal($\mathcal{U}$)
	"Z-Frm μ "($\mathcal{L}$): $\mathcal{L} \equiv \lambda y = x$	"F-Bedg μ "($\mathcal{U}$):

Es liegt hier also ein System $\text{GLO} = \{\text{GL}_\mu\}$ von Systemen GL_μ vor, welches in seiner Gesamtheit gegen das hypothetische Axiomen-System der Naiven Mengenlehre konvergiert.

Als Ergebnis erhalten wir, daß man praktisch jedem offenen Satz eine Menge zuordnen kann. Dabei muß es natürlich nicht der Fall sein, daß die absolute Prädikaten-Extension dieses offenen Satzes eine Menge ist, sondern wir erhalten die Menge, indem wir nach dem kognitiven Sinn des Satzes fragen, und diesem Sinn entsprechend den offenen Satz einschränken, indem wir also solcherart eine relative Prädikaten-Extension erzeugen.

Teilweise können wir solche relative Prädikatenextensionen durch Umformung des offenen Satzes wieder in absolute Prädikatenextensionen zurückführen, bei welcher ja das zu einer Menge zusammenfassende Objekt im offenen Satz nicht vorkommen darf. Dh. bei der absoluten Prädikatenextension darf in der mengenbildenden Eigenschaft keine Aussage über das Objekt gemacht werden, welches gerade durch diese Eigenschaft gebildet werden soll.

Formal geschieht das dadurch, daß die durch den Partikularisator " $\exists$ " (Existenzquantor) gebundene Variable, z.B. das " x ", in der mengenbildenden Eigenschaft (Aussage) nicht vorkommen darf, z.B. $A^{(x)}(y)$. Und geleistet wird eine solche Mengenbildung durch das ordentliche Frege-Schema

$$\exists x \cdot y \in x \leftrightarrow A^{(x)}(y).$$

Hand in Hand mit der Rückführung der relativen Prädikat-Extensionen in ihre entsprechenden absoluten, erfolgt also eine Umwandlung des außerordentlichen Frege-Schemas in ein ordentliches.

4.3 Mathematische Relevanz

Auf diese Art und Weise sind wir der naiven Mengenlehre wieder nahe gekommen, wo mit der Cantor'schen Definition "die Objekte unseres Denkens und unserer Anschauung" zu einer Gesamtheit zusammengefaßt werden.

Freilich ist eine solche Auslegung des Cantor'schen Mengenbegriffes in der Axiomatischen Mengenlehre bisher nicht üblich gewesen.

Es ist also falsch zu sagen, daß die Cantor'sche Definition zur Mengenbildung unbrauchbar ist, es kommt nur darauf an, sie entsprechend sinngemäß anzuwenden.

Abschließend sei noch erwähnt, daß die hier beschreibenden Systeme der Syntho-Mengenlehre SY, Elementar-Mengenlehre EL, Global-Mengenlehre GL0

und Octal-Mengenlehre OC für die Mathematik von großer Bedeutung sind, wegen der Existenz einer Allmenge und der Abgeschlossenheit bezüglich den Boole'schen Operationen.

Bei der Definition der Kategorien in der Mathematik – das sind bestimmte Morphismen, also Zuordnungen von irgendeinem Vorbereich auf einen Nachbereich, – ist es üblich, die All-Klasse V als Objekt-Bereich zu verwenden. Diese ist in der Zermelo-Mengenlehre eine Proper-Klasse, also eine Ummenge.

Will ich jetzt die Klasse aller Kategorien über dieser All-Klasse bilden, so ist das eine Klasse zweiter Stufe. Um Kategorien von Kategorien betrachten zu können, muß ich also eine Klasse zweiter Stufe aufbauen. Und das ist sehr unpraktisch für die Mathematik, weil ich verschiedene Klassenstufen und verschiedene Elementschaftrationen unterscheiden muß.

Will ich die Kategorie aller Kategorien betrachten, benötige ich dazu eine Klassen-Theorie höherer Stufe, und eine solche ist immer mit technischen Schwierigkeiten verbunden. Sie ist nicht schwer, jedoch kompliziert und unübersichtlich.

Um diesen technischen Apparat zu umgehen, definieren die ostdeutschen Mathematiker überwiegend die Kategorien über den Universen, das sind komplizierte, bezüglich dem Mengenbildungsprozeß abgeschlossene Mengen.

Ist die All-Klasse jedoch eine Menge, so sind die Kategorien von Kategorien automatisch über der All-Menge ebenfalls als Mengen charakterisierbar und somit Elemente der All-Menge. Bei den Kategorien über der All-Menge betrachte ich also automatisch die Kategorien von Kategorien mit.

Somit wäre der verschiedene Ansatz bei der Definition der Kategorien entweder über der All-Klasse oder über den Universen, sowie die damit verbundenen Schwierigkeiten bei der Definition der Kategorien über der All-Menge, etwa derjenigen der Syntho-Mengenlehre, überwunden.

X-DIE ORDBARE MENGENLEHRE OM

Die Zusammenfassung von Objekten zu einer Gesamtheit kann auch erfolgen, indem man Objekten eine gewisse Ordnung beibringt. Wir fassen die Individuen-Variablen nicht als (reine) Mengen-Variablen auf, sondern als "ordbare" Mengen-Variablen und schreiben sie deshalb mit kyrillischen Buchstaben (siehe Variablen-Korrespondenz VK). So erhalten wir anstelle der

Zermelo-Fraenkel'schen eine Ordbare Mengenlehre OM, in welcher es neben der "Elementschaft" noch eine "Angabe der Positionen" gibt. Beide zusammen seien die "Statements" einer Menge. Wir erhalten so ungeordnete und geordnete Mengen und können Ordnungsfunktoren einführen, welche die Individuenbereiche der ordbaren Mengen gleichlassen, jedoch ihre Ordnungen verändern. Z.B. ist die ungeordnete Zahlenklasse

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$$

die natürlich geordnete Zahlenklasse

$$\omega = \langle\langle 0, 1, 2, \dots \rangle\rangle$$

die umgekehrt geordnete Zahlenklasse

$$\omega^* = \langle\langle \dots, 2, 1, 0 \rangle\rangle$$

und der Ordnungsfunktor "*" kehrt die Ordnung um.

" θ " ... Statementschaft " γ " ... Angabenschaft

" ε " ... Elementschaft " $(\cdot)$ " ... Positionär

$$OM \supseteq ZF(\varepsilon/\theta, =/\gamma; A_i/\pi_i, B_i/\beta_i, \dots, x_i/\rho_i, y_i/\mu_i, z_i/\delta_i) + (kl\exists)$$

Die Beziehung zwischen den drei Prädikaten läßt sich etwa durch das Axiom (StatElAng) regeln

$$\neg \theta \wedge b \leftrightarrow \neg \varepsilon b \vee \neg \gamma b \quad \theta \equiv \varepsilon \wedge \gamma$$

Für das Verhältnis zwischen Positionär und den drei Prädikaten mögen folgende Axiome gelten:

(PosStatAx) "Jeder Positionär hat genau seine Stellen und sich selbst als Statement."

$$\neg \gamma \wedge b \wedge \exists \theta (\neg \theta \wedge b) \leftrightarrow \exists \equiv \neg \gamma \vee \exists \equiv b \vee \exists \equiv (\neg \theta \wedge b)$$

(PosElAx) "Jeder Positionär hat genau seine Stellen als Elemente"

$$\neg \gamma \wedge b \wedge \exists \varepsilon (\neg \varepsilon \wedge b) \leftrightarrow \exists \equiv \neg \gamma \vee \exists \equiv b$$

Mit Hilfe einer Reihe weiterer solcher Axiome läßt sich der Positionär charakterisieren, für den auch das sehr starke Postulat (PosAng) gelten kann, daß "jede Angabe ein Positionär ist".

$$\neg \gamma \wedge \gamma \rightarrow \forall \theta \forall \gamma: \gamma \equiv (\theta \wedge \gamma)$$

Zwei (Element-)gleiche ordbare Mengen oder 2 angabengleiche o. Mengen

$$\neg \gamma \wedge b \wedge \exists \gamma \exists \varepsilon \gamma \leftrightarrow \exists \varepsilon b \quad \neg \gamma \wedge b \wedge \exists \gamma \exists \gamma \leftrightarrow \exists \gamma b$$

brauchen dann keineswegs statement-gleich oder identisch zu sein.

$$\neg \gamma \wedge b \wedge \exists \gamma \exists \gamma \leftrightarrow \exists \gamma b \quad \neg \gamma \wedge b \wedge \exists \gamma \exists \gamma \leftrightarrow \exists \gamma b$$

$$\neg \gamma \wedge b \wedge \exists \gamma \exists \gamma \leftrightarrow \exists \gamma b \quad \neg \gamma \wedge b \wedge \exists \gamma \exists \gamma \leftrightarrow \exists \gamma b$$

ANHANG

1. Zeichen-Tabelle

Mengendefinition (Cantor): "Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohl unterschiedener Objekte unseres Denkens oder unserer Anschauung."

In unserer Darstellung: Mengen.....Kleinbuchstaben

Klassen....Großbuchstaben

Klassen-Präsentator: $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

Klassen-Operator: $\{x; A(x)\}$

N..... Menge der natürlichen Zahlen

Z..... Menge der ganzen Zahlen

Q..... Menge der rationalen Zahlen

R..... Menge der reellen Zahlen

$\emptyset$ Leere-Menge

Ω Menge der finiten Ordinalzahlen

ω Klasse aller Ordnungszahlen

P_m Potenzmenge einer Menge m

($\neq$ Menge aller Teilmengen von m)

V..... All-Klasse (Klasse aller Mengen)

$A \cup B$ Vereinigung der Klassen A und B

(= diejenige Klasse aller Mengen, die zu A oder B gehören)

$A \cap B$ Durchschnitt der Klassen A und B

(= Klasse aller Mengen, die zu A und B gehören)

$A - B$ Differenz der Klassen A und B

(= Klasse aller Mengen, die zu A, aber nicht zu B gehören)

$\overline{A}$ Komplement der Klasse A, auch $\neg A$ oder $V - A$

(= Klasse aller Mengen, die nicht zu A gehören)

Groß-Klein-Schreibweise:

Kleinbuchstaben bezeichnen Mengen,

Großbuchstaben bezeichnen Klassen.

$$u(x) \vdash M_g X \rightarrow u(X)$$

" $\vdash$ " ... Regel-Schema-Zeichen

oder $u(x) \leq M_g X \rightarrow u(X) \wedge \neg M_g X \rightarrow u(\emptyset)$.

" $\leq$ " ... Kontextual-Def.-Zeichen

Für Vereinigung und Durchschnitt von Klassen gilt:

Assoziativ-Gesetz:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

Kommutativ-Gesetz:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Distributiv-Gesetz: (De-Morgan'sche Regeln):

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Verband (Distributiv-Komplementärer Verband, auch Boole'scher Verband):

Das ist eine Klasse K, für deren Elemente ein "Komplement", eine "Vereinigung" und ein "Durchschnitt" erklärt ist, ^{für} welche obige Gesetze gelten.

Cartesisches Produkt:

Das Cartesische Produkt $A \times B$ ist die Klasse aller geordneten Paare, deren 1. Stelle Element von A und deren 2. Stelle Element von B ist.

$$A \times B =_{\text{def}} \{ \langle x, y \rangle : x \in A \wedge y \in B \}$$

Funktion:

"F ist eine Abbildung der Klasse A auf die Klasse B" oder "F ist eine Funktion mit Vorbereich A und Nachbereich B", wenn jedem Element x aus A genau ein Element F(x) aus B zugeordnet ist, und alle Elemente aus B als Funktionswert auftreten.

$$F: A \rightarrow B \Leftrightarrow F \neq \emptyset \wedge \text{Vorbereich } F = A \wedge \text{Nachbereich } F = B$$

"F ist eine Abbildung der Klasse A in die Klasse B", wenn jedem Element x aus A genau ein Element F von x aus B zugeordnet ist".

$$F: A \rightarrow B \Leftrightarrow F \neq \emptyset \wedge \forall x \in A \exists! y \in B. \langle x, y \rangle \in F.$$

Mächtigkeit:

Gleichmächtigkeit:

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists F. (F: A \leftrightarrow B).$$

Zwei Klassen A und B heißen gleichmächtig, wenn es eine eindeutige Funktion von A auf B gibt.

Kleiner-Gleichmächtigkeit: (Naive Mengenlehre,

Die Klasse A heißt kleiner-Gleichmächtig zur Klasse B,

wenn es eine zur Klasse A gleichmächtige Teilmenge von B gibt,

$$A \subset B \Leftrightarrow \exists C. A \sim C \subset B. \quad A \subset B \Leftrightarrow A \subset B \wedge A \not\sim B$$

(andere Definition, via Auswahlaxiom Äquivalent zur ersteren):

Die Klasse A ist kleiner-gleichmächtig zur Klasse B,

wenn es eine Funktion von der Klasse B auf die Klasse A gibt.

$$A \triangleleft B \Leftrightarrow \exists F. F: B \rightarrow A. \quad \vdash_{AC} A \triangleleft B \Leftrightarrow A \not\sim B$$

Gleichheitsdefinition (Extensional, auch als Axiom verwendbar):

Zwei Klassen A und B sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben.

$$A = B \Leftrightarrow \bigwedge_x. x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

(Intensional):

Zwei Klassen A und B sind gleich, wenn sie die gleichen Eigenschaften haben, (bzw. wenn sie Elemente in den gleichen Klassen sind).

$$A = B \Leftrightarrow \bigwedge X. A \in X \Leftrightarrow B \in X.$$

(Totale, Leibniz'sche Gleichheit):

Zwei Klassen sind gleich, wenn sie extensional und intensional gleich sind.

$$A = B \Leftrightarrow A =_{(e)} B \wedge A =_{(i)} B$$

Identität:

Das ist jene Funktion, welche jedem Ding es selbst zuordnet.

$$I = \{ \langle x, x \rangle : x = x \} = \{ y : \forall x. y = \langle x, x \rangle \}$$

Klassen-Komprehensionsschema (Frege-Schema):

Zu jeder wohlgeformten Form (Eigenschaft) $\mathcal{U}$ existiert eine Klasse X, welche genau diejenigen Elemente y enthält, welche die Eigenschaft $\mathcal{U}$ haben.

$$\forall \mathcal{U} : \bigvee_x \bigwedge_y. y \in X \Leftrightarrow \mathcal{U}(y).$$

umfangsreich sind, keine Mengen sein können.

Nach der Konstruktion des Synthesystems SY kommt man durch eine Reihe von Umformungen und Erweiterungen desselben zur Elementarmengenlehre EL, wo genau diejenigen Objekte Mengen sind, die nicht mit ihrem Komplement äquivalent sind.

Die Octalmengenlehre OC ist ein mit dem Stratifikationssystem NF vergleichbares System, in dem die Formeln keinen zyklischen Teil haben dürfen. Die Individuen-Variablen einer Formel werden im OC als Punkte, das Epsilon als Kante und die ganze Formel als gerichteter Graph aufgefaßt.

Durch Anwendung ähnlicher Verfahren wie sie zur Auflösung der semantischen Paradoxien verwendet werden, etwa der des Lügners, gelangt man zur Global-Mengenlehre GLO, indem zu OC eine Menge anderer Systeme GLi, die nicht so gebaut sind wie die bisherigen axiomatischen Mengenlehresysteme, hinzukommen. Bislang durfte in den Kompressionsschemata in der objektbildenden Eigenschaft der Formel nicht über das Objekt, das erzeugt werden soll, ausgesagt werden. D.h. der Name eines Objekts, dessen Existenz postuliert wird, darf in der Formel nicht vorkommen. In den genannten Zusatzsystemen GLi kommt er jedoch wohl vor. Um Widersprüche, die durch ein solches Vorkommen auftreten können, zu vermeiden, wird im System GLO zu einem A, wo ein solcher Name x nicht vorkommt, eine Zusatzbedingung "und B", in der x vorkommt, hinzugenommen, z.B. "und y ungleich x". Damit wird der Begriff der "relativen Prädikatenextension" geprägt, "relativ" deswegen, weil die Prädikatenextensionen bspw. durch "außer sich selbst", oder stärkere Zusätze, eingeschränkt werden. Es ist die Transkription der Umgangssprache in die kognitive Sprache, die diese Relativierung vollzieht. So kann jedem offenen Satz eine Menge als relative Prädikatenextension zugeordnet werden, ohne daß jene Widersprüche der naiven Mengenlehre auftreten, zu denen es durch die unkritische Mengenbildung als absolute Prädikatenextension kam. Schimanovich zeigt programmatisch, in welche Richtung ein solches System von Systemen GLO, das gegen ein hypothetisches Axiomensystem NM der naiven Mengenlehre konvergiert, gehen könnte.

Da ein solches System von der Elementen-Präexistenz zur Selbst-Referenz aufsteigt, überwindet es das typentheoretische Denken und erreicht jenen Komplexitätsgrad, der für eine adäquatere Beschreibung kybernetischer, soziologischer, linguistischer, etc., Systeme notwendig ist.

Peter Weibull

Künstler

