Jahrbuch der Kunst

4

Peter Weibel und Eckehart Köhler

(1997

S. 319-321

Gödels Unentscheidbarkeitsbeweis – Ideengeschichtliche Konturen eines berühmten mathematischen Satzes

Eine der bedeutendsten mathematisch-logischen Entdeckungen der Neuzeit, „der Satz des Jahrhunderts", wie sie oft apostrophiert wird, stammt nicht von Ludwig Wittgenstein, wie vielleicht manche vermuten würden, sondern von einem anderen Wiener, der bis vor kurzem einer breiteren Öffentlichkeit wie auch dem Kulturpublikum vollkommen unbekannt war, obwohl dieser „Satz" schon in den 30er Jahren publiziert worden ist. Es war ein 25jähriger junger Wiener, der 1931 eine Arbeit veröffentlichte, seit welcher „der Gegenstand der Logik niemals mehr der gleiche sein wird" (Johann von Neumann). Sie trug den Titel *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I;* ihr Autor: Kurt Gödel.

Kurt Gödel wurde am 28. April 1906 in Brünn, Teil der österreichisch-ungarischen Monarchie, geboren und begann 1924 seine physikalischen, später vorwiegend mathematischen und logischen Studien an der Universität Wien, wo er 1930 mit der Arbeit *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls* promovierte, worin er seine Meisterschaft in der Behandlung der aktuellsten Probleme der logischen Grundlagenforschung erwies. Sie war auch eine Art Voraussetzung für seine Arbeit über die *Unvollständigkeit* (1931), die 1932 als Habilitationsschrift angenommen wurde und über die Hans Hahn, neben Karl Menger (Sohn des Nationalökonomen Carl Menger) sein wichtigster Lehrer, schrieb:

Die Habilitationsschrift „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I" ist eine Leistung ersten Ranges, die in allen Fachkreisen das größte Aufsehen erregte und – wie sich mit Sicherheit voraussehen läßt – ihren Platz in der Geschichte der Mathematik einnehmen wird. Es gelang Herrn Gödel zu zeigen, daß sich im logischen System der Principia Mathematica von Whitehead-Russell Probleme angeben lassen, die mit den Mitteln dieses Systems unentscheidbar sind, und daß dasselbe für jedes formallogische System gilt, in dem die Arithmetik der natürlichen Zahlen ausdrückbar ist; damit ist auch gezeigt, daß das von Hilbert aufgestellte Programm, die Widerspruchsfreiheit der Mathematik zu beweisen, undurchführbar ist.[1]

Gödels große Errungenschaft, die seine Zeitgenossen so frappierte und die „weit durch Raum und Zeit hindurch ein Markstein bleiben wird" (Johann von Neumann), ist sein Unvollständigkeitsbeweis, den er im Sommer 1930 geführt und im Herbst desselben Jahres bei einer Tagung in Königsberg ausgerechnet Johann von Neumann vorgeführt hat, der selbst sechs Jahre lang an Hilberts Seite gekämpft und die Widerspruchsfreiheit eines bedeutenden Teilsystems der Zahlentheorie bewiesen hatte (1927). Gödel zeigte als erster in der Geschichte der Mathematik (in den Worten Von Neumanns):

[...] daß gewisse mathematische Theoreme mit den akzeptierten exakten Methoden der Mathematik weder bewiesen noch widerlegt werden können. Mit anderen Worten hat er das Vorhandensein von unentscheidbaren mathematischen Sätzen bewiesen. Er bewies weiters, daß ein sehr wichtiger spezifischer Satz dieser Klasse von unentscheidbaren Problemen angehörte: die Frage, ob Mathematik von inneren Widersprüchen frei ist. Das Resultat ist in seiner quasiparadoxen „Selbstverneinung" bemerkenswert: Es wird nie mit mathematischen Mitteln möglich sein, die Gewißheit zu erlangen, daß Mathematik nicht Widersprüche enthält. Es muß der wichtige Punkt betont werden, daß dies kein philosophisches Prinzip oder eine einleuchtende intellektuelle Einstellung, sondern das Resultat eines strengen mathematischen Beweises von besonders raffinierter Art ist.[2]

Modifizierung des Lügners

Es war Gödels Leistung, mit äußerster Präzision eine wirklich rein finit konstruierte Formel angegeben zu haben, die nachweislich unentscheidbar ist, und dadurch das formale Sprachsystem, in dem sie konstruiert wurde, unvollständig zu machen. Gödels Grundgedanke war genial einfach: Die zu konstruierende, unentscheidbare Formel soll sagen: „Ich bin unbeweisbar".

Dabei adaptierte Gödel eine der ältesten Antinomien überhaupt, die des paradoxen „Lügners", die Epimenides, dem Kreter zugeschrieben wird. Epimenides soll einmal gesagt haben: „Alle Kreter lügen unentwegt", welcher Satz anscheinend weder wahr noch falsch sein kann, wenn man bedenkt, daß Epimenides ein Kreter war, und daß die unbeschränkte Aussage auch ihn treffen müßte. Also muß auch er gelogen haben, weil er selbst als Lügner eingeschlossen ist. Wenn Epimenides die Wahrheit aussagte, können nicht alle Kreter unentwegt gelogen haben, denn einer davon, Epimenides, hatte gerade nicht gelogen. Also muß Epimenides Aussage als falsch gelten, weil sie hier eine Ausnahme gefunden hatte. Das ist zunächst noch kein Widerspruch, wohl aber ein paradoxer Sachverhalt. Der wird jedoch zur exakten Kontradiktion eo ipso, wenn wir anders formulieren: „Dieser Satz, den ich gerade spreche, ist falsch".

1) Zitiert nach Curt Christian, „Leben und Wirken Kurt Gödels". Monatshefte für Mathematik 89, Springer Verlag, 1980, S. 263.
Österreich, insbesondere die Zweite Rebublik, hat sich um Gödel wenig gekümmert. Vor dem Zweiten Weltkrieg erhielt er nur eine unbeamtete Privatdozentur. Danach wurde ihm erst 1966 eine Honorarprofessur für Mathematik an der Universität Wien verliehen. Die politischen Erfahrungen der 20er und 30er Jahre und die Ignoranz des mediokren akademischen Betriebes nach 1945 verursachten eine sehr kühle Distanz Gödels gegenüber Österreich.

2) Diese und die frühere Passage aus einer Lobrede Von Neumanns anläßlich der Verleihung des Albert-Einstein-Preises an Gödel. New York Times, 15. März 1951, S. 31.

Princeton, 20./III. 1956

Lieber Herr v. Neumann!

Ich habe mit größtem Bedauern von Ihrer Erkrankung gehört. Die Nachricht kam mir ganz unerwartet. Morgenstern hatte mir zwar schon im Sommer von einem Schwächeanfall erzählt, den Sie einmal hatten, aber er meinte damals, dass dem keine grössere Bedeutung beizumessen sei. Wie ich höre, haben Sie sich in den letzten Monaten einer radikalen Behandlung unterzogen u. ich freue mich, dass diese den gewünschten Erfolg hatte u. es Ihnen jetzt besser geht. Ich hoffe u. wünsche Ihnen, dass Ihr Zustand sich bald noch weiter bessert u. dass die neuesten Errungenschaften der Medizin, wenn möglich, zu einer vollständigen Heilung führen mögen.

Da Sie sich, wie ich höre, jetzt kräftiger fühlen, möchte ich mir erlauben, Ihnen über ein mathematisches Problem zu schreiben, über das mich Ihre Ansicht sehr interessieren würde: Man kann offenbar leicht eine Turingmaschine konstruieren, welche von jeder Formel F des engeren Funktionenkalküls u. jeder natürl. Zahl n zu entscheiden gestattet, ob F einen Beweis der Länge n hat [Länge = Anzahl der Symbole]. Sei $\psi(F,n)$ die Anzahl der Schritte, die die Maschine dazu benötigt u. sei $\varphi(n) = \max_F \psi(F,n)$. Die Frage ist, wie rasch $\varphi(n)$ für eine optimale Maschine wächst. Man kann zeigen $\varphi(n) \geq Kn$. Wenn es wirklich eine Maschine mit $\varphi(n) \sim Kn$ (oder auch nur $\sim Kn^2$) gäbe, hätte das Folgerungen von der grössten Tragweite. Es würde nämlich offenbar bedeuten, dass man trotz der Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems die Denkarbeit des Mathematikers bei ja-oder-nein Fragen vollständig durch Maschinen ersetzen könnte. Man müsste ja bloss das n so gross wählen, dass, wenn die Maschine kein Resultat liefert, es auch keinen Sinn hat über das Problem nachzudenken. Nun scheint es mir aber durchaus im Bereich der Möglichkeit zu liegen, dass $\varphi(n)$ so langsam wächst. Denn 1.) scheint $\varphi(n) \geq Kn$ die einzige Abschätzung zu sein, die man durch eine Verallgemeinerung des Beweises für die Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems erhalten kann; 2.) bedeutet ja $\varphi(n) \sim Kn$ (oder $\sim Kn^2$) bloss, dass die Anzahl der Schritte gegenüber dem blossen Probieren von N auf $\log N$ (oder $(\log N)^2$) verringert werden kann. So starke Verringerungen kommen aber bei anderen finiten Problemen durchaus vor, z.B. bei der Berechnung eines quadratischen Restsymbols durch wiederholte Anwendung des Reziprozitätsgesetzes. Es wäre interessant zu wissen, wie es damit z.B. bei der Feststellung, ob eine Zahl Primzahl ist, steht u. wie stark im allgemeinen bei finiten kombinatorischen Problemen die Anzahl der Schritte gegenüber dem blossen Probieren verringert werden kann.

Ich weiss nicht, ob Sie gehört haben, dass "Post's problem", ob es unter den Problemen $(\exists y)\,\varphi(y,x)$ mit rekursivem φ Grade der Unlösbarkeit gibt, von einem ganz jungen Mann namens Richard Friedberg in positivem Sinn gelöst wurde. Die Lösung ist sehr elegant. Leider will Friedberg nicht Mathematik, sondern Medizin studieren (scheinbar unter dem Einfluss seines Vaters).

Was halten Sie übrigens von den Bestrebungen, die Analysis auf die verzweigte Typentheorie zu begründen, die neuerdings wieder in Schwung gekommen sind? Es ist Ihnen wahrscheinlich bekannt, dass Paul Lorenzen dabei bis zur Theorie des Lebesgueschen Masses vorgedrungen ist. Aber ich glaube, dass in wichtigen Teilen der Analysis nicht eliminierbare imprädikative Schlussweisen vorkommen.

Ich würde mich sehr freuen, von Ihnen persönlich etwas zu hören; u. bitte lassen Sie es mich wissen, wenn ich irgend etwas für Sie tun kann.

Mit besten Grüssen u. Wünschen, auch an Ihre Frau Gemahlin

Ihr sehr ergebener Kurt Gödel

S. Ich gratuliere Ihnen bestens zu der

Ein Brief Kurt Gödels an Johann von Neumann in dessen Todesjahr 1956.
in: Michael Sipser. *The History and Status of the P versus NP Queation*, 24th Annual ACM STOC, 1992.

Gödel ersetzte darin Falschheit durch die Unbeweisbarkeit und bemerkte dann, daß diese naheliegende Formulierung „Dieser Satz ist unbeweisbar" gar nicht mehr antinomial ist, und er schickte sich an, dies (mit finiten Beweismitteln!) zu zeigen. (Die Ersetzung von Wahrheit durch Beweisbarkeit ist und war sehr gängig, besonders bei Intuitionisten wie Brouwer, weil man gerne den abstrakten, logischen Wahrheitsbegriff mit dem menschennäheren, erkenntnistheoretischen Begriff der Beweisfindung ersetzen wollte, wobei man häufig gleich darauf kommt, diejenigen Wahrheiten als sinnlos auszuschalten, die nicht durch finite Beweismethoden bewiesen werden können.)

Gödels Problem war nun zweierlei: Erstens mußte er den Selbstbezug, der in den Worten „dieser Satz" angedeutet wird, einwandfrei in einem formalen System im Sinne von Frege, Russell und Hilbert darstellen. In der Zahlentheorie spricht man nur über Zahlen und Funktionen derselben, jedoch nicht über Formeln. Daher muß erst eine Zuordnung von Zahlen zu Formeln und Folgen derselben festgelegt werden. Sodann mußte er zweitens den Beweisbarkeitsbegriff selbst so genau präzisieren, daß er als exakter Gegenstand des formalen Systems behandelt werden kann. Die Beweisbarkeit (als Satzbeziehung über die Sätze des Systems) kann dann auf Zahlen abgebildet werden und ergibt dadurch selbst wiederum einen zahlentheoretischen Satz.

In den weiteren Ausführungen seines berühmten Aufsatzes[3] von 1931 verwendete Gödel keine mathematisch besonders schwierigen Gedankengänge der Zahlentheorie. Er zeigte seine Meisterschaft vielmehr im sprachlich-begrifflichen Aufbau der Beweiskonstruktion, vor allem in der Sicherheit seiner Behandlung der „Doppelbödigkeit" der Simultanschaltung von Begriffen auf der Objektebene (innerhalb des Systems) wie auf der Metaebene.

[3] *„Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I". Monatshefte für Math. u. Phys. 38 1931, S. 173-198. Für ein weiteres Studium des Gödelschen Beweises sei auf das Buch „Der Gödelsche Beweis" von Ernst Nagel und James Newman, Wien 1964, hingewiesen, ebenso auf den Bestseller „Gödel, Escher, Bach. Ein Endloses Geflochtenes Band" von Douglas R. Hofstadter, Stuttgart 1985, und auf Werner DePauli-Schimanovich, Peter Weibel, „Kurt Gödel – ein mathematischer Mythos", hpt, Wien, 1997, nach dem gleichnamigen Film von 1986. Auf Initiative der Schule Schimanovich wurde 1987 die internationale Kurt Gödel Society gegründet, die ein Jahrbuch herausgibt und alle zwei Jahre ein Kurt Gödel Kolloquium veranstaltet. „The Foundational Debate: Complexity and Constructivity in Physics", als Buch herausgegeben von W. DePauli Schimanovich, E. Köhler, F. Stadler, Kluwer, 1995.*

Gödelisierung

Dabei beeindruckte am stärksten Gödels zahlenmäßige Darstellungsmethode von Sätzen und Beweisen, die ihm zu Ehren seither „Gödelisierung" genannt wird. Gödels Unentscheidbarkeitsformel von 1931 bezieht sich auf sich selbst, ist selbstreferentiell und selbstabbildend. Die Arithmetik bildet sich auf sich selbst ab (das heißt arithmetische Sachverhalte – Sätze und Beweise – auf arithmetische Gegenstände – Zahlen und Zahlfunktionen). Das ist die Idee der Gödelisierung, und die erwies sich als geschichtsmächtig. Die Gödelisierung geht so vor sich, daß jedem Ausdruck eines formalen Systems eine Zahl zugeordnet wird, und zwar so, daß man die Zuordnung auch umkehrt, indem man für jede Zahl berechnen kann, ob sie einer und wenn ja, welcher Formel sie entspricht. Die Zuordnung kann auch so geschaffen werden, daß bestimmte Zahlen für die Klasse der Beweisfolgen von Sätzen reserviert werden.

Bei der eindeutigen Zuordnung von Ausdrücken und Zahlen kamen Gödel nun die Vorlesungen über Zahlentheorie seines Lehrers Philipp Furtwängler zugute. Es ist ja bekannt, daß Zahlen eindeutig in Primzahlfaktoren zerlegt werden können, und diese Tatsache verwendete Gödel folgendermaßen: Ein komplexer formaler Ausdruck besteht aus einer Folge von Zeichen, denen gewisse Zahlen eindeutig zugeordnet sind. Diese werden als Exponenten den Primzahlen (der aufsteigenden Primzahlenreihe) angefügt, und die sich daraus ergebenden Primzahlenpotenzen werden miteinander multipliziert. Dadurch ist auch dem komplexen Ausdruck eindeutig eine Zahl zugeordnet. Dieses Verfahren kann an einem einfachen Beispiel verdeutlicht werden. Man nehme an, dem Individuumsnamen a wird die Zahl 3 zugeordnet, und das Prädikat P (etwa „sterblich") bekommt die Gödelnummer $2^3 \cdot 3^5 = 32.768$. Diese Zuordnung ist nun eindeutig und erfüllt daher die vorgegebene Auflage, weil die Zahl 32.768 nur wieder in die Primzahlfaktoren 2^3 und 3^5 zerlegt werden kann, und keinem anderen Ausdruck als Pa entsprechen kann.

Mit seinen Primzahlzuordnungen schaffte Gödel den Durchbruch, denn er hatte damit einen Code gefunden, der es erlaubte, insbesondere auch Beweisbeziehungen zwischen den Sätzen eines Systems innerhalb des Systems (durch einen zahlentheoretischen Satz im System) repräsentieren zu können. Erst dieser Trick erlaubt es, den Selbstbezug in dem Satz „Dieser Satz ist unbeweisbar" auch formal korrekt ausdrücken zu können. Dabei zeigte sich natürlich, daß dies nur möglich ist, wenn das formale System reichhaltig genug ist, denn die Möglichkeiten der Kodifizierung müssen gegeben sein.

Eckehart Köhler, geb. 1939 in Darmstadt. Studium der Psychologie und Wissenschaftstheorie. 1962 Abschluß an der Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania (bei A. Grünbaum, N. Rescher, W. Stegmüller). 1976 Promotion bei W. Leinfellner an der Universität Nebraska. 1972-76 Managing Editor von *Theory and Decision*. 1978-79 Organisation von Wittgenstein-Symposien, Kirchberg am Wechsel. Gründungsmitglied der Kurt-Gödel-Gesellschaft und des Instituts Wiener Kreis. Am Betriebswirtschaftszentrum Floridsdorf der Universität Wien tätig. Aktuelle Forschung über Kurt Gödel, den Wiener Kreis und über Grundlagen der Sozialwissenschaften und der Ethik.

in: *Gödel-Satz, Möbius-Schleife, Computer-Ich.* Franz Kreuzer im Gespräch mit Paul Watzlawick, Werner Schimanovich, Eckehart Köhler, Paul Badura-Skoda und Werner Leinfellner, Franz Deuticke Verlagsges.m.b.H., Wien 1986, S. 72-101.