Kurt Gödel und die mathematische Logik

Die Unerschöpflichkeit des Geistes (in „Wissenschaft Aktuell“), K43-Gö3

Werner DePauli-Schimanovich und Peter Weibel

[245-246

Kurt Gödel - Sein Leben und Wirken:

Die Unerschöpflichkeit des Geistes

Von Werner Schimanovich und Peter Weibel

Im Frühjahr nächsten Jahres wird von den beiden Autoren voraussichtlich ein Buch über Kurt Gödel mit dem obigen gleichnamigen Titel erscheinen. Das Buch wird über den Menschen Kurt Gödel, seine Freundschaft mit Einstein, seine epochemachenden Leistungen sowie sein Wirken im Wiener Kreis und in Princeton berichten. Neben 50 Fotographien aus Gödels Leben, einer Sprechplatte, einer Familienchronik, Auszügen aus 250 Briefen und vielen anderen Beiträgen enthält es interessante Interviews mit berühmten Freunden und Kollegen Kurt Gödels: Edmund Hlawka, Georg Kreisel, Karl Menger, Oskar Morgenstern Jr., Johann von Neumann, u.a.
Im Folgenden wird eine Kurzbiographie Kurt Gödels und ein Interview mit Sir Karl Popper wiedergegeben, in der Hoffnung, beim Leser eine gewisse Vorfreude auf das Erscheinen des Buches hervorzurufen.

Am 14. Jänner 1978 starb ein 71 - jähriger Mann an einer Herzkrankheit, über den das größte Universalgenie unseres Jahrhunderts, Johann von Neumann, anläßlich der Verleihung des Albert - Einstein - Preises im März 1951 folgendes sagte: „Seine Leistung für die mathematische Logik ist einzigartig und monumental in deren Geschichte, ja mehr als ein Monument ist sie ein Markstein, der weit in Raum und Zeit sichtbar bleiben wird. Nach ihm wird die Logik niemals mehr dieselbe sein". Dieser Mann, der sich in der Fachwelt den Ruf des größten und tiefgehendsten mathematischen Denkers des 20. Jahrhunderts erworben hat, ist in seiner Heimatstadt vollständig in Vergessenheit geraten: Kurt Gödel. Und wer weiß, wie Österreich seine großen Söhne ehrt, kennt auch den Namen dieser Heimatstadt: Wien. Kurt Gödel wurde am 28. April 1906 in Brünn in der österreichisch - ungarischen Monarchie geboren, studierte Mathematik und Physik an der Universität Wien, promovierte dort 1930 mit der Dissertation "Über die Vollständigkeit des Logikkalküls", welche bereits 1929 approbiert worden war.
Er wurde Dozent am Mathematischen Institut der Universität Wien und eifriger Mitarbeiter von Professor Karl Menger (dem Sohn des berühmten Nationalökonomen Carl Menger) in dessen mathematischen Kolloquium, aus dem eine große Reihe bekannter Wissenschaftler hervorging.

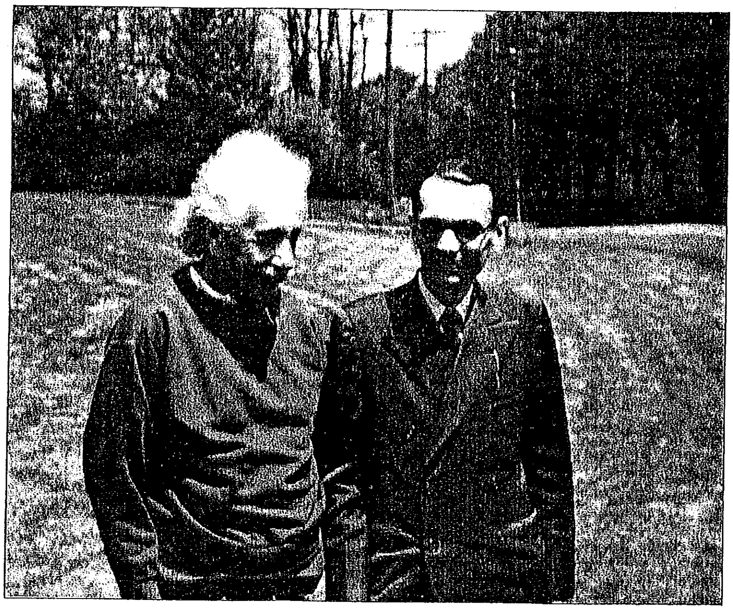
Wiener Kreis und Princeton

Als Mitglied des 'Wiener Kreises' (neben Rudolf Carnap, Philipp Frank, Hans Hahn, Otto Neurath, Moritz Schlick, Sir Karl Popper, etc.) erwarb er sich wegen seiner introvertierten Art, seiner gelegentlichen nervösen Gespanntheit und der enormen Kompliziertheit seiner Arbeiten den Ruf eines 'genialischen' Sonderlings. In den vom Mathematischen Institut herausgegebenen Monatsheften für Mathematik und Physik publizierte er 1931 (neben anderen Schriften) seine epochale Arbeit "Über formal entscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme", oft als "Satz des Jahrhunderts" apostrophiert, nachdem er deren Ergebnisse bereits 1930 im Anzeiger der Akademie der Wissenschaften angekündigt hatte. Hier wird nämlich mit mathematischer Exaktheit ein Satz bewiesen (das 'Gödel'sche Theorem' bzw. der Gödel'sche Beweis benannt), dessen philosophische Implikation darstellt, daß das menschliche Denken in gewissem Sinne nicht mechanisierbar ist, oder genauer, daß man prinzipiell keinen Computer bauen und programmieren kann, der alle gültigen Sätze der Mathematik automatisch herzuleiten gestattet.
Von 1933 bis 1938 war Gödel Dozent für Mathematik an der Universität Wien, 1939, nach Kriegsbeginn, folgte er abermals einem Ruf nach Princeton, USA, wo ihm das berühmte Institute for Advanced Studies bis 1976 eine würdige und wirksame Forschungs - und Arbeitsstätte bot. 1948 wurde er amerikanischer Staatsbürger, 1951 und 1952 Ehrendoktor von Yale und Harvard, 1953 Professor in Princeton, wo er auch am 14. Jänner 1978 starb.

Mengenlehre

In den Vorkriegsjahren löste er das 50-jährige Problem der Mengenlehre, nämlich die Frage nach der Unabhängigkeit des umstrittenen Auswahlaxioms und der Kontinuumshypothese, in der einen Richtung.
Das Auswahlaxiom erlaubt uns, aus einer unendlichen Familie von Mengen gewisse Elemente simultan auszuwählen. Es spielt in der Mengenlehre etwa jene Rolle, die das Parallelen - Axiom in der Euklidischen Geometrie einnimmt. Die Kontinuumshypothese besagt, daß jede Menge zwischen den natürlichen Zahlen und den reellen Zahlen mit einer dieser beiden Zahlenmengen gleichmächtig sein muß. Gödel bewies die relative Widerspruchsfreiheit dieser beiden wichtigen mathematischen Sätze mit den Axiomen. Später, 1949/50, wandte er sich, von seinem Freund und Institutskollegen Albert Einstein angeregt (der ihn auch selbst für seinen Preis 1951 vorschlug), den kosmologischen Problemen der allgemeinen Relativitätstheorie zu und anschließend logisch - philosophischen Themen. Gödels wenige Arbeiten waren, obwohl stets von tiefgehendstem und weitreichendstem Inhalt, durch eine besondere Eleganz der Ökonomie ausgezeichnet und für den Empfindsamen von subtiler dichterisch - philosophischer Qualität. Die letzten 20 Jahre seines Schaffens waren gezeichnet von einem publizistischen Schweigen, während er in zahlreichen Diskussionen mit Kollegen die mächtige amerikanische Schule der mathematischen Logik (Alonzo Church, Stephen C. Kleene, Barkley Rosser et al.) ausbauen half, zu deren Begründung er mit seinen Vorlesungen seit 1934 beigetragen hatte. Gelegentliche Sanatoriumsaufenthalte, die auf

Universität Wien: Wiege vergessener Genies?



"Nach ihm wird die Logik niemals mehr dieselbe sein" (A. Einstein (l) über K. Gödel)

seine nervenaufreibende geistige Konzentration zurückzuführen waren, gehörten vielleicht zu den Gründen, weswegen er Kongresse und Symposien mied.

Der Gödel'sche Beweis

Worin besteht nun Gödels epochale Leistung für die Geschichte des Denkens, die ihm im englisch - amerikanischen Sprachraum, wohl auch in Frankreich und Deutschland, zu solch legendärem Ruf (teilweise über Wittgenstein weit hinaus) verhalf, nicht aber in Österreich?
Im Altertum war bereits die Antinomie des Lügners bekannt, wo Epidemis, der Kreter, sagte: "Das, was ich (jetzt) sage, ist falsch". Dies ist ein früher und trivialer Fall, wo ein Satz seine eigene Ungültigkeit besagt (und befände er sich innerhalb eines korrekten formalen Systems, seine eigene Unableitbarkeit), die zu einem Widerspruch führt. Die Auflösung dieses Widerspruchs erfolgte durch die Trennung in die beiden Sprachebenen: Objekt - und Metasprache.
Ein ähnliches Verfahren liegt dem Gödel'schen Satz zugrunde, nämlich die Konstruktion einer Formel (G) der Arithmetik, die bei einer bestimmten Interpretation genau dann wahr ist, wenn sie in diesem arithmetischen System nicht ableitbar ist, da sie infolge ihrer Konstruktion ihre eigene Unbeweisbarkeit behauptet. Wäre umgekehrt die Formel (G) falsch und daher per Definitionem beweisbar, so wäre mit ihr eine falsche Formel ableitbar, und somit das formale System widerspruchsvoll. (G) muß also zugleich wahr und nicht - ableitbar sein. Für die Interpretation der arithmetischen Formeln und die Konstruktion von (G) wird eine Prozedur verwendet, für welche sich der Name Gödelisierung eingebürgert hat: Jedem Variablen - Buchstaben und allen Zeichen (der Arithmetik) wird eine Zahl, die Gödelzahl, in bestimmter Weise zugeordnet. Dadurch werden metamathematische Ausdrücke auf Zahlen und Formeln abgebildet. Mit Hilfe dieser Arithmetisierung und der Konstruktion der Formel (G) konnte Gödel 1931 zeigen, daß schon die Arithmetik unvollständig ist, d.h., daß es kein rekursiv axiomatisierbares Axiomensystem gibt, welches alle ihre gültigen Formeln ableiten läßt, also unter seinen Theoremen alle Wahrheiten der evident gegebenen vollen Arithmetik der ganzen (natürlichen) Zahlen widerspruchsfrei umfaßt. Es sind nämlich weder die Formel (G) noch das Negat von (G) ableitbar, obwohl eines von beiden doch wahr sein muß. Diesen Sachverhalt, welchen man formale Unentscheidbarkeit nennt, kann man folgendermaßen zeigen: Angenommen (G) wäre ableitbar. Dann müßte es wegen der Korrektheit der Logik auch wahr sein, und somit per constructionem unbeweisbar. Das ist ein Widerspruch. Aus der Annahme, daß andererseits Non - (G) ableitbar ist, folgt wiederum aufgrund der Korrektheit, daß es ebenfalls wahr sein muß, also (G) falsch. Das bedeutet jedoch (nach dem vorher gesagten), daß (G) ableitbar ist, also den Fall 1, der bereits als widersprüchlich nachgewiesen wurde. Diese heuristisch dargelegten Gedankengänge hat Gödel formalisiert und mit Hilfe eines umfangreichen mathematischen Formelapparates exakt ausgeführt.
Gödel konnte weiters auch zeigen, daß der mathematische Satz "Der arithmetische Kalkül ist widerspruchsfrei" im Kalkül selbst (mit seinen eigenen Mitteln) nicht beweisbar ist. Beide, Unvollständigkeit und Konsistenz-Unbeweisbarkeit gelten darüber hinaus auch für alle formalen Deduktions-Systeme, welche ihre eigene Metatheorie in formalisierter Form beinhalten (also die Arithmetik umfassen), und daher für die Mathematik als Ganze. Als ein Deduktionssystem bezeichnen wir einen Kalkül oder eine Grammatik, also ein Regelsystem wie beispielsweise das Schachspiel, welches aus einer Menge von Axiomen eine Reihe von Formeln, Sätzen bzw. Konfigurationen abzuleiten gestattet.

Philosophische Implikationen

Das Programm von David Hilbert bestand darin, die Mathematik in finiter Weise auf einem umfassenden Kalkül axiomatisch aufbauen zu können, also ein formales Deduktions-System zu konstruieren, welches alle Sätze der Mathematik mechanisch herzuleiten gestattet. Gödels Dissertation, worin die Vollständigkeit der reinen Prädikatenlogik erster Stufe gezeigt wurde, nämlich daß jede wahre Formel im System auch ableitbar ist, war noch eine Arbeit an dieser Richtlinie der finiten Begründung der Mathematik. Ein Jahr später zeigte er jedoch mit seinem Beweis der Unvollständigkeit der Arithmetik, daß das Hilbert'sche Programm zum Scheitern verurteilt ist.
Damit war auch der jahrhundertelange Traum einer universellen Denkmaschine, welche schon Leibnitz konzipiert hatte, beendet.
Denn das menschliche Denken, welches die wahren Sätze der Mathematik umfaßt und mit seiner natürlichen Sprache und ihrer Semantik (Metamathematik) auch selbstreferentielle Konnexe und Bezüge eingeht, welche die Konstruktion von (G) ermöglichten, ist somit nicht mechanisierbar, etwa durch einen programm - gesteuerten Computer, da dieser analog wie die logischen Schluß - Systeme der Mathematik, die Kalküle der Prädikatenlogik, hierarchisch aufgebaut ist und selbstreferentielle Statements nicht ermöglicht. Bei der Lösung mathematischer Probleme wird es daher immer der geistigen Schöpfungskraft des Mathematikers bedürfen, um neue mathematische Wahrheiten finden zu können. Und der Kreativität des Geistes bei der logischen Analyse der Wirklichkeit kann keine Grenze für das Auffinden der Wahrheit gesetzt werden.
Der strenge mathematische Beweis der Existenz von formal entscheidbaren arithmetischen Sätzen, und der Beweis der Non - Demonstrabilität der Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems im gleichen System selbst beweisen die Notwendigkeit der geistigen Ingenuität des Menschen, um neue mathematische Axiome erzeugen und mathematische Probleme lösen zu können.